# 6. Many different 0-1 polytopes [4]

## a)

La cota $f(d) < 2^{2^d}$ es trivial pues es el número total de subconjuntos de vértices. Para la otra desigualdad, usaré el conjunto $S$ de la pista que evidentemente tiene $2^{2^{d-1}-2}$ elementos.

Primero, voy a mostrar que en cualquier polítopo $P \in S$ el único facet con $2^{d-1}$ vértices es $F = [0,1]^{d-1} \times \{1\}$. Evidentemente esta es una cara, y esta asociada al vector $(0, 0, ..., 0, 1)$. Llamemos $G$ al polítopo formado por los vértices de $P$ contenidos en $[0,1]^{d-1} \times \{1\}$. Después probaré que dados $2^{n-1}+1$ vértices del $n$-hipercubo, el polítopo formado por ellos tiene dimensión $n$, pero lo usaré por ahora. Si tomamos un facet de $P$, que comparta más de $2^{d-2}$ vértices con $F$, el facet debe ser $F$, dado que la dimensión de su intersección con $F$ debe ser $d-1$. De igual modo, si comparte más de $2^{d-2}$ vértices con $G$, tiene que ser $G$, pero este facet tiene a lo más $2^{d-1}-2$ vértices por construcción. Entonces los únicos facets distintos de $F$ con $2^{d-1}$ vértices deberían compartir la mitad de sus puntos con $F$ y la otra con $G$. Pero las caras $d-2$ dimensionales de $F$ satisfacen la ecuación $x_i = 1$ o $x_i = 0$ para algún $1 \leq i < d$. Pero alguno de los puntos $(0, 0, .., 0, 0) \in P$ o $(1, 1, ..., 1, 0) \in P$ también satisface esta ecuación, y por tanto existirá un facet $d-1$ dimensional que una la cara de $F$ con un punto de $G$, y el facet satisface esta ecuación. Entonces los únicos facet que comparten una cara $d-2$ dimensional con $F$ son subconjuntos de hiperplanos $x_i = k$ que los denotaré por $F_{i,k}$. Pero estos facets tienen exactamente $2^{d-1}$ puntos en el $d$-hipercubo y al menos uno de ellos no está en $P$, pues $(0, 1, 1, ..., 1, 0) \notin P$ y $(1, 0, 0, ..., 0, 0) \notin P$. Entonces $F_{i,k}$ no tiene tantos vértices como $F$, así como ningún otro facet.

[4] Este problema lo pensé conjuntamente con Fabián Prada y Federico Castillo

Ahora voy a probar que para cada $P \in S$ la clase de equivalencia de $P$ bajo la relación de ser combinatóricamente equivalentes, tiene a lo más tantos representantes como simetrías del cubo de $\mathbb{R}^{d-1}$. Consideremos $P, P' \in S$ equivalentes bajo una transformación $T$. En el poset de $P$ y $P'$ sólo existe un facet con $2^{d-1}$ vértices que es el facet superior $F$, y como $T$ conserva incidencia, debemos tener $T(F) = F$. Como $F$ es un $d-1$-hipercubo, tendremos entonces que $T$ restringido a $F$ es una de las simetrías del cubo dado que $T$ preserva incidencia. Probaré que $T$ queda determinado por su restricción en $F$.

Consideraremos los facet $F_{i,k}$ nuevamente. Como había dicho antes, estos son los únicos facets adyacentes a $F$, en el sentido de compartir caras $d-2$ dimensionales. Por tanto, la imagen de un $F_{i,k}$ debe ser un $F_{j,l}$. Pero cada punto $g = (g_1, g_2, ..., g_{d-1}, 0) \in G$ se puede ver como $g = \bigcap_{i=1}^{d-1} F_{i,g_i} \cap G$, pues cada $F_{i,k}$ me indica cuál es la $i$-ésima coordenada. Si $T(F)$ está fijo, $T(F_{i,k})$ también estará fijo, pues estos facet están determinados por la cara que comparta con $T(F)$. Como los $T(F_{i,k})$ están fijos, cada punto $T(g)$ estará fijo pues se debe preservar incidencia y por tanto intersecciones. Entonces $T$ queda determinado por su restricción a $F$.

Como el número de simetrías del $n$-hipercubo es $2^n n!$, el número de de objetos combinatóricamente distintos debe ser al menos $\frac{|S|}{2^{d-1}(d-1)!} = \frac{1}{(d-1)!} 2^{2^{d-1}-d+1}$ y bastaría ver que es mayor que $2^{2^{d-2}}$ que es equivalente a $2^{2^{d-2}+1} > (d-1)!$. Lamentablemente esta ecuación sólo es válida si $d \geq 6$, pero los casos pequeños pueden verificarse fácilmente a mano. Para $d = 6$ se cumple, y si hacemos inducción quedará probar que $2^{2^{d-2}-1} > d$, lo cual es evidentemente cierto.

Para concluir la prueba, probaré que dados $2^{n-1}+1$ vértices del $n$-hipercubo, el polítopo formado por ellos tiene dimensión $n$. Suponga sin pérdida de generalidad que uno de estos vértices es el origen, añádales un 1 a todos en la primera coordenada, y miremos independencia lineal. El primer vector es $(1, 0, 0, ..)$ así que podemos ignorar este vector y la primera coordenada del resto y quedarnos con los otros $2^{n-1}$ vectores. Basta probar entonces que entre $2^{n-1}$ vectores binarios no nulos hay $n$ independientes. Pero si los vemos como elementos de $\mathbb{Z}_2^n$ sabemos que todo espacio $n-1$ dimensional tiene $2^{n-1}$ elementos incluido el origen, así que tienen que tener mayor dimensión.