2. La menor cantidad de vértices que puede tener un 3-politopo es 4. En la tarea pasada vimos que se cumplen las desigualdades $f \leq 2v - 4$ y $v \leq 2f - 4$. Si $v = 4$, entonces $f \leq 8 - 4 = 4$, por lo que $f = 4$, pues no puede tener sólo tres caras. Además sabemos que se cumple la identidad $v + f = e + 2$. Si $v = 4$ y $f = 4$, entonces $e = 6$. La

única forma en que tenga 6 aristas es con 4 vértices y 4 caras, pues si $v+f=8$, las condiciones dadas previamente nos muestran que no hay otra forma. En el tetraedro todos los vértices están conectados y como $deg\,(v)\geq 3$ para todo vértice, y hay 4 vértices, ésta es la única configuración posible, por lo que hay un único 3-politopo con 6 aristas.
Para que $e=7$, necesitamos que $v+f=9$. Esto sólo es posible si $v=4$ y $f=5$ o $v=5$ y $f=4$. Pero $5\nleq 8-4=4$, luego no hay ninguno 3-politopo con 7 aristas.
Para que un 3-politopo tenga 8 aristas la única posibilidad es $v=5=f$ pues ya vimos la restricción que impone el tener 4 caras o vértices. Veamos que todos los 3-politopos con 5 caras y vértices son combinatóricamente equivalentes. Si llamamos $g_1,...,g_f$ la cantidad de aristas de la cara i, tenemos que $\sum_{i=1}^{f} g_i=2e=16$. Como 3 no divide a 16, vemos que todas las caras caras no pueden ser triángulos. Como no puede haber un pentágono como cara, pues el politopo sería un 2-politopo y no un 3-politopo, vemos que hay una cara que es un cuadrilátero. Esos cuatro vértices están en un plano, y el vértice restante no está en el plano. Por ser el politopo convexo, el vértice restante debe estar conectado con cada uno de los puntos. Luego cualquier 3-politopo que tenga 5 caras y 5 vértices es equivalente a la pirámide de base cuadrada.
Veamos ahora el caso de 9 vértices. Se necesita que $v+f=11$ y por lo que hemos visto previamente tenemos que esto sólo es posible si $v=5$ y $f=6$ o $v=6$ y $f=5$. Basta con probar que todos los 3-politopos con 6 vértices y 5 caras son equivalentes, para concluir que todos los 3-politopos con 5 vértices y 6 caras son equivalentes. Pues si hay dos 3-politopos distintos con 5 vértices y 6 caras, sus duales serían distintos, mas sus duales tendrían 6 vértices y 5 caras, por lo que deberían ser iguales. Llamamos $g_1,...,g_5$ la cantidad de aristas en la cara i. $\sum_{i=1}^{5} g_i=2e=18$ por lo que si todas sus caras fueran triangulares concluiríamos que el politopo tendría 6 caras, luego tiene una cara que no es triangular. Si alguna cara fuera en forma de pentágono, obtendríamos una pirámide con el pentágono como la base, por lo que tendría 6 caras. Como sus 6 vértices no pueden estar en el mismo plano, concluimos que una de sus caras es un cuadrado. Si decimos

que la cara 5 es ésta, llegamos a que $\sum_{i=1}^{4} g_i = 2e - g_5 = 18 - 4 = 14.$ Luego todas no pueden ser triangulares, con lo que podemos concluir que debe haber otra cara cuadrada. Ahora bien, Si hay dos caras que son cuadradas, la única forma para tener 6 vértices y esas caras, es que los cuadrados compartan dos vértices. Como no podemos agregar más vértices, el politopo queda completamente determinado, con lo que tenemos un prisma con base triangular. Con esto podemos concluir que hay dos 3-politopos con 9 aristas. También tomando el dual del prisma con base triangular obtenemos un politopo de 5 vértices y 6 aristas. Éste es el único que tiene estas características, luego, los dos casos en que un 3-politopo tiene 9 aristas son politopos duales.