

Sea P un d -politopo en \mathbb{R}^n , el cual podemos caracterizar, usando la H description, como $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ donde $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Definase $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, como $Tx = -Ax + b$. Se va a probar que T es inyectiva en el politopo P : tome $v \neq w \in P$, si $Tv = Tw \Rightarrow Av = Aw \Rightarrow A(v - w) = 0$. Llame $u := (v - w)$, como $v \in P$ sabemos que $Av \leq b$ y por ende $A(v + \alpha u) \leq b$, de lo cual concluimos que $v + \alpha u \in P$ para todo α . Dado que P es acotado y $u \neq 0$ llegamos a una contradiccion, de la cual deducimos que $Tv \neq Tw$ para todos $v \neq w \in P$. De lo anterior se concluye que $T : P \rightarrow T[P]$ es un isomorfimo, y por tanto que P es afinmente isomorfo a $T[P]$ (pues T es una transformacion afin).

Veamos ahora que representa $T[P]$. $x \in T[P] \iff x = -Ap_x + b$ para algun $p_x \in P \iff x \in T[\mathbb{R}^n]$ y $x \geq 0$ (pues $0 \leq -Ap + b$ ssi $p \in P$) $\iff x \in T[\mathbb{R}^n] \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m$. Por tanto podemos afirmar $T[P] = T[\mathbb{R}^n] \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m$. Claramente $T[\mathbb{R}^n] = -A[\mathbb{R}^n] + b \subseteq \mathbb{R}^m$ es un subespacio afin, por ende podemos concluir que P es afinmente isomorfo a $T[\mathbb{R}^n] \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ donde $T[\mathbb{R}^n]$ es un espacio afin de \mathbb{R}^m . Esto es precisamente lo que se deseaba probar.