1. f-vectors of 3-polytopes

'⇒'

Aplicando la fórmula de Euler, obtenemos:

$$f \leq 2v - 4 \Longleftrightarrow 3f \leq 2e \quad (1)$$
$$v \leq 2f - 4 \Longleftrightarrow 3v \leq 2e \quad (2)$$

Sea N el número de parejas de vértices (v_i, v_j) que están conectados. Claramente cada arista se está contando exactamente dos veces de esta forma (una por cada extremo), así que $N = 2e$. Pero por otra parte, cada vértice debe estar conectado a al menos otros 3 vértices, por lo cual $N \geq 3v$, y se tiene la ecuación 2.

Sea M el número de parejas de caras (f_i, f_j) que comparten un lado. Nuevamente, cada arista se contará 2 veces (una por cada cara que toca), así que $M = 2e$. Pero cada cara tiene al menos 3 aristas, así que compartirá lados con al menos otras 3 caras. Por tanto $M \geq 3f$, y tenemos la ecuación 1.

'⇐'

Sean v, e, f un vector que satisfface las condiciones dadas. Primero supongamos $v > f$, e ignoremos por completo e por la relación de Euler. Para que las ecuaciones 1 y 2 se cumplan simultáneamente es inmediato que $v, f \geq 4$. Si $f = 4$, la ecuación 2 indica $v = 4$. Por tanto, $f \geq 5$ en el caso supuesto.

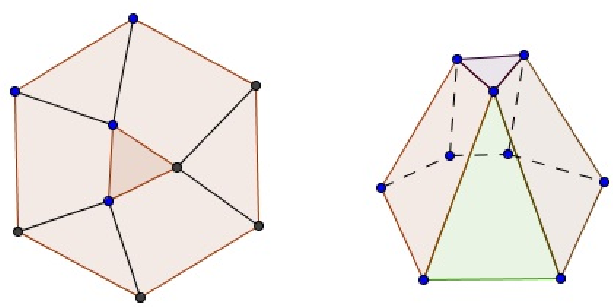

Figura 1: Prisma con caras triangular y hexagonal como grafo y en 3D

Consideremos la estructura de la figura 1, que es una especie de prisma, donde las caras principales son distintas (un triángulo y un hexágono). La idea es tomar estas figuras, cuyos vértices son polígonos regulares paralelos con m y n lados, y $n \geq m$. Si esto se hace, habrán n caras laterales (una por cada arista del polígono grande), para un total de $f = n + 2$ caras. Además, se tienen $v = n + m$ vértices. Esta construcción permitirá obtener vectores con $f + 1 = n + 3 \leq v \leq n + n = 2f - 4$ donde $n \geq 3$.

Si $v = f$, consideremos las pirámides de $n = v - 1$ lados en la base.

Finalmente, si $v < f$, consideremos el dual de los polígonos obtenidos cuando $v > f$. La figura 2 muestra el dual del prisma de la figura 1 y se muestra tanto el dual como grafo, como su forma final en 3D. En general, estos polítopos consistirán en la intersección de dos conos opuestos con diferente número de lados.

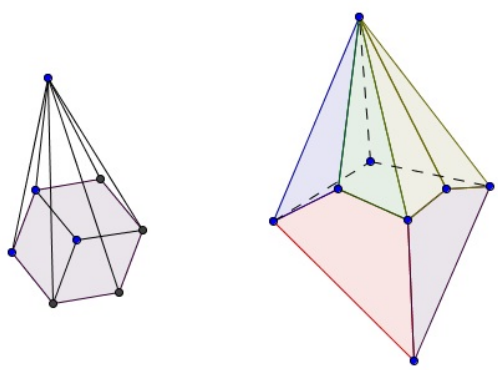

Figura 2: Dual del prisma de caras triangular y hexagonal como grafo y en 3D