

Politopos de Posibilidades



Federico Ardila–Mantilla*

Estos son los ejercicios del curso de Federico Ardila-Mantilla en ECCO Tico 2026. Les recomiendo trabajarlos en grupo, con curiosidad, comunicación cuidadosa, paciencia y generosidad.

Pueden trabajarlos en el orden que prefieran, pero les recomiendo realizar al menos un ejercicio de cálculo y uno conceptual. Los problemas están diseñados para despertar su interés, y pueden estudiarlos y discutirlos con sus compañeros, aunque probablemente sea mejor dejarlo para después de la sesión de ejercicios. Los **ejercicios en negrilla** son recomendados.

1 Sesión de ejercicios 1.

1.1 Ejercicios computacionales

1. (Descripciones H y V) **Encuentra la descripción V y H de**

- (a) un polígono en $\mathbb{R}^2$ como se muestra con facetas en las direcciones $-e_1, -e_2, e_1, e_2, e_1 + e_2$.
- (b) un politopo de 3 caras en $\mathbb{R}^3$ como se muestra con facetas en las direcciones de las facetas $-e_1, -e_2, -e_3, e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3$.



2. (Abanicos normales) **Dibuja los abanicos normales de $\diamondsuit$, $\square_3$, $\triangle_3$ y $\diamondsuit_3$.**

3. (Cubos) Si nunca has hecho esto antes, dibuja el hipercubo $\square_4$. Si tienes tiempo esta noche, dibuja o construye el hipercubo $\square_6$.

*Queen Mary University of London; San Francisco State University. f.ardila@qmul.ac.uk

1.2 Ejercicios conceptuales

4. (Descripciones H y V)

(a) **Demuestra que nuestras dos descripciones del d -cubo $\square_d$ coinciden:**

$$\text{conv}\{+1, -1\}^d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1 \text{ para todo } 1 \leq i \leq d\}$$

(b) Demuestra que nuestras dos descripciones del d -politopo de cruce $\diamond_d$ coinciden:

$$\text{conv}\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, -\mathbf{e}_d\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{a} \mathbf{x} \leq 1 \text{ para todo } \mathbf{a} \in \{+1, -1\}^d \subset (\mathbb{R}^d)^*\}$$

5. (Operaciones con politopos.)

- (a) Si $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ son politopos, demuestre que $P \cap Q \subset \mathbb{R}^d$ es un politopo.
- (b) Si $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ son politopos, demuestre que $P + Q \subset \mathbb{R}^d$ es un politopo.
- (c) Si $P \subset \mathbb{R}^d$ y $Q \subset \mathbb{R}^e$ son politopos, demuestre que $P \times Q \subset \mathbb{R}^{d+e}$ es un politopo.

Piense en cómo podría obtener sus descripciones V y H a partir de los politopos originales.

1.3 Problemas

6. (Politopos de matroides) Demuestre que las siguientes dos descripciones del politopo de una matroide M coinciden:

$$\text{conv}\left\{\sum_{b \in B} \mathbf{e}_b : B \text{ base}\right\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d x_i = r(M), \sum_{a \in A} x_s \leq r(A) \text{ para todo } \emptyset \subsetneq A \subsetneq [d]\right\}$$

¿Cuáles son los vértices de este politopo? ¿Cuáles son las facetas?

7. (Un ejemplo de programación lineal.) Una agencia de ayuda recibe solicitudes de n voluntarios y busca asignarles a algunos de ellos a $m < n$ sitios de trabajo. Cada sitio recibe un voluntario. Se les muestran descripciones de los solicitantes y responden a la pregunta: en una escala del 1 al 5, ¿qué tan satisfecho estaría con este solicitante? El objetivo de la agencia es asignar voluntarios a las ubicaciones de manera que se maximice la satisfacción total (la suma de las puntuaciones de satisfacción individuales de las agencias.)

Formula esta pregunta como un problema politopal. Encuentra la descripción V y la descripción H del politopo correspondiente. ¿Qué puedes decir sobre este politopo?

2 Sesión de ejercicios 2.

Estos son los ejercicios del curso de Federico Ardila-Mantilla en ECCO Tico 2026. Les recomiendo trabajarlos en grupo, con curiosidad, comunicación cuidadosa, paciencia y generosidad.

Pueden trabajarlos en el orden que prefieran, pero les recomiendo realizar al menos un ejercicio de cálculo y uno conceptual. Los problemas están diseñados para despertar su interés, y pueden estudiarlos y discutirlos con sus compañeros, aunque probablemente sea mejor dejarlo para después de la sesión de ejercicios. Los **ejercicios en negrilla** son recomendados.

2.1 Ejercicios computacionales.

1. (Cálculo de posets: ejemplos)

- (a) Calcula el poset de divisores D_{60} .
- (b) Calcula el poset de particiones Part_4 .
- (c) **Calcula el poset de caras de $\square_3$.**

2. (Cálculo de funciones de Möbius: ejemplos)

- (a) Calcula la función de Möbius del poset de divisores D_{60} .
- (b) Calcula la función de Möbius del poset de partición Part_4 .
- (c) Calcula la función de Möbius del poset de caras de $\square_3$.

2.2 Ejercicios conceptuales.

3. (Factorización de posets)

- (a) Demuestra que el poset booleano es $2^A \cong \mathbf{2} \times \cdots \times \mathbf{2}$.
- (b) Demuestra que el poset de divisores es $D_n \cong (\mathbf{t}_1 + \mathbf{1}) \times \cdots \times (\mathbf{t}_k + \mathbf{1})$, donde $n = p_1^{t_1} \cdots p_k^{t_k}$ es la factorización prima de n .

4. (Intervalos) Demuestra que

- (a) Todo intervalo de una cadena es una cadena.
- (b) **Todo intervalo de un poset booleano es un poset booleano.**
- (c) Todo intervalo de un poset de divisores es un poset de divisores.
- (d) Todo intervalo de un poset de particiones es un producto de posets de particiones.
- (e) Todo intervalo de un poset de caras politópicas es un poset de caras politópicas.

5. (Retículos) Demuestra que:

- (a) Toda cadena es un retículo.
- (b) Todo poset booleano es un retículo.
- (c) Todo poset de divisores es un retículo.
- (d) Todo poset de particiones es un retículo. Todo poset de caras politópicas es un retículo.

6. (f -polinomios)

- (a) Calcula el f -polinomio del pentágono, Δ_{d-1} , $\square_d$, $\diamond_d$, el dodecaedro y el icosaedro.
- (b) Calcula el f -polinomio de la pirámide $\text{pyr}(P)$ sobre un politopo P en términos del f -polinomio de P .
- (c) Calcula el f -polinomio del producto $P \times Q$ de dos politopos P y Q en términos de los f -polinomios de P y Q .

2.3 Problemas.

7. (Cálculo de funciones de Möbius: familias)

- (a) Calcula la función de Möbius del poset de divisores D_n .
- (b) Calcula la función de Möbius de los posets de caras $\diamond_n$, $\triangle_n$, $\square_n$, $\diamond_n$.
- (c) (*) Calcula la función de Möbius del poset de particiones Part_n .

8. (Teoría de Ehrhart) Para un politopo P con vértices enteros, sea $E_P(n)$ el número de puntos reticulares en la n -ésima dilatación nP , y $E_P^o(n)$ el número de puntos reticulares interiores en nP .

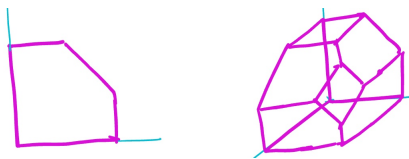
- (a) Expresa la función de Ehrhart de P en términos de la función de Ehrhart interior de sus caras.
- (b) Expresa la función de Ehrhart interior de P en términos de la función de Ehrhart de sus caras.
- (c) (*) Demuestra que $|E_P^o(n)| = |E_P(-n)|$.
- (d) (*) Demuestra que estas funciones son polinómicas en n .

La función $E_P(n)$ se denomina *polinomio de Ehrhart* de P .

3 Sesiones de ejercicios 3 y 4.

3.1 Ejercicios computacionales.

1. (Ejemplos eulerianos no politopals)
 - (a) Encuentra un poset euleriano que no sea el poset de caras de un politopo.
 - (b) Encuentra un retículo euleriana que no sea el poset de caras de un politopo.
2. (Conos de deformaciones: ejemplos)
 - (a) Encuentra **todos** los polígonos en $\mathbb{R}^2$ como el de la figura, con direcciones de facetas $-e_1, -e_2, e_1, e_2, e_1 + e_2$.
 - (b) Encuentra todos los politopos de dimensión 3 en $\mathbb{R}^3$ como el de la figura, con direcciones de facetas $-e_1, -e_2, -e_3, e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3$.
 - (c) Encuentra todos los politopos en $\mathbb{R}^d$ con el mismo abanico normal que el cubo $\square_d$.



3. (Retículos eulerianos en la naturaleza) Calcula los posets y verifica que son retículos eulerianos.
 - (a) El poset $O\Pi_4$ de particiones ordenadas de $[4]$.
 - (b) El poset Subdiv_6 de subdivisiones de un hexágono.

3.2 Ejercicios conceptuales.

4. (El cono de tipos del abanico trenza) Demuestra que el cono de tipos del abanico trenza en $\mathbb{R}^E$ es el cono submodular:

$$\{f : 2^E \rightarrow \mathbb{R} : f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B)\}$$

5. (El cono de tipos del abanico del asociaedro) Calcula el cono de tipos del abanico del asociaedro. Demuestra que es simplicial.
6. (Descomposiciones de sumas de Minkowski)

- (a) Demuestra que

$$\text{Perm}_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{conv}(e_i, e_j)$$

- (b) Demuestra que

$$\text{Assoc}_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{conv}(e_i, e_{i+1}, \dots, e_j)$$

3.3 Problemas.

7. (Vértices del asociaedro) Encuentra y demuestra una fórmula para el vértice v_T del asociaedro Assoc_{n+2} correspondiente a una triangulación (o equivalentemente un árbol binario) T .
8. (El politopo cíclico es muy vecinal.) El politopo cíclico es un d -politopo en $\mathbb{R}^d$ con n vértices definidos de la siguiente manera:

$$C(n, d) = \text{conv } \mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)$$

donde $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$.

- (a) El *criterio de paridad de Gale* describe las facetas del politopo cíclico: Un d -subconjunto $I \subseteq [n]$ define una faceta si y solo si dos elementos cualesquiera de $[n] - I$ están separados por un número par de elementos de I . Demuéstralo.
 - (b) Concluye que el politopo cíclico $C_d(n)$ es $(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor)$ -vecinal.
9. (Qué tan vecinal puede ser?) Si un politopo d -dimensional es $(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1)$ -vecinal, demuestra que debe ser un símplex.

(Recordemos que un politopo es k -vecinal si cualquier conjunto de k vértices forma una cara.)