Parcial de Combinatoria Algebraica

Marzo 4, 2003

Problemas

1. Decimos que una permutación $a_1 \dots a_n$ es **alternante** si $a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \cdots$. Sea E_n el número de permutaciones alternantes de $[n]$.
   (a) Demuestre que
   $$2E_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k E_{n-k}.$$
   (b) Concluya que
   $$\sum_{n\geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} = \tan x + \sec x.$$
   (c) Use el resultado de la parte (b) para dar una demostración combinatoria de la identidad
   $$1 + \tan^2 x = \sec^2 x.$$
2. Sean n y k enteros positivos. Sea $a_k(n)$ el número de particiones de n en partes que no son múltiplos de k. Sea $b_k(n)$ el número de particiones de n donde ninguna parte aparece k o más veces.

   Demuestre que $a_k(n) = b_k(n)$.
3. Sea P un poset finito y sea k el tamaño máximo de una anticadena de P. Sean A y B dos anticadenas de P de k elementos. Sean C el conjunto de elementos maximales y D el conjunto de elementos minimales del poset $A \cup B$ (con el orden inducido por P). Demuestre que C y D son anticadenas de P de k elementos.
4. Encuentre el número de posets P de n elementos tales que, para cada entero positivo i con $1 \leq i \leq n-1$, P tiene exactamente dos ideales de i elementos. Dibuje los posets P y $J(P)$ que se obtienen en el caso $n = 4$.
5. Sea P un poset de n elementos numerado naturalmente. Si f_k es el número de cadenas de $J(P)$ de $k+1$ elementos, el f-polinomio de $J(P)$ es:
   $$f_{J(P)}(x) = \sum_k f_k x^k.$$
   Podemos ver las extensiones lineales de P como permutaciones de $[n]$. Si w_k es el número de extensiones lineales de P con k descensos, el W-polinomio de P es:
   $$W_P(x) = \sum_k w_k x^k.$$
   Demostrar que
   $$W_P\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{f_{J(P)}(x)}{(x+1)^n}.$$
   ¿Qué dice esta afirmación cuando $x \to \infty$?

   Nota. Una numeración natural de P es una numeración de los elementos de P con los números $1, \dots, n$ tal que, si $i < j$ en el poset, entonces el número asignado al elemento i es menor que el número asignado a j.