Examen Final de Combinatoria Algebraica

Instrucciones.

- El examen dura desde el Miércoles 23 de Abril a las 4pm hasta el Miércoles 30 de Abril a las 4pm. Durante esa semana, usted puede consultar cualquier fuente: apuntes, libros, bibliotecas, internet, etc. Sin embargo, no puede hablar sobre el examen ni mostrárselo a nadie distinto del profesor.
- La idea de este examen es aprender. Mucho. Para eso hay que trabajar. Mucho. El examen no es demasiado difícil, pero sí es demasiado largo. Reserve bastante tiempo para resolverlo y no lo deje para última hora!
- Por último, cuénteme aproximadamente cuánto tiempo le dedicó a este examen. Esto no es para generar competencia entre ustedes, ni tendrá ningún efecto sobre su nota; es sólo para mi información.
- Mucha suerte!

1. Cómo Contar los Racionales

Una **representación pseudobinaria** de n es una partición de n en potencias de dos, de modo que cada sumando aparece máximo dos veces. Por ejemplo, las representaciones pseudobinarias de 10 son $8+2, 8+1+1, 4+4+2, 4+4+1+1$ y $4+2+2+1+1$. Sea $a(n)$ el número de representaciones pseudobinarias de n.

(a) Encuentre una fórmula para la función generatriz $A(x) = \sum a(n)x^n$.

(b) Demuestre que $A(x) = (1+x+x^2)A(x^2)$. Comparando los coeficientes de x^{2n} y de x^{2n+1} en los dos lados de esta ecuación, concluya que $a(2n) = a(n) + a(n-1)$ y que $a(2n+1) = a(n)$.

(c) Dé una demostración combinatoria de las dos igualdades de la parte (b).

Considere el árbol infinito con raíz, tal que cada vértice tiene dos hijos. Empezando con la raíz, y bajando piso por piso de izquierda a derecha, escriba en los vértices del árbol las fracciones $a(0)/a(1)$, $a(1)/a(2)$, $a(2)/a(3), \ldots$ en ese orden. Observe que los hijos izquierdo y derecho del vértice con número $a(n-1)/a(n)$ tienen números $a(2n-1)/a(2n)$ y $a(2n)/a(2n+1)$ respectivamente.

Por lo tanto, la raíz del árbol tiene el número $1/1$, y los hijos izquierdo y derecho de un vértice numerado i/j se numeran $i/(i+j)$ e $(i+j)/j$, respectivamente. Esto determina la numeración de todo el árbol.

(d) Demuestre que las fracciones escritas en los vértices del árbol son irreducibles. (Sugerencia: Use inducción sobre el piso en el que se encuentra el vértice.)

(e) Demuestre que toda fracción irreducible a/b aparece en algún vértice del árbol. (Sugerencia: Use inducción sobre $a+b$. Considere dos casos: que la fracción a/b sea mayor o menor que 1.)

(f) Demuestre que ninguna fracción aparece en más de un vértice del árbol. (Sugerencia: Use un argumento análogo al de la parte (e).)

(g) Concluya que $a(0)/a(1)$, $a(1)/a(2)$, $a(2)/a(3), \ldots$ es una lista completa y sin repeticiones de todos los números racionales positivos.

2. Ordenes de Intervalos Unitarios

Considere n intervalos cerrados $I_1, \ldots, I_n$ de longitud 1 en la recta real. Sea $I_k = [a_k, a_k+1]$. Estos intervalos definen un poset P de la siguiente manera: $I_i < I_j$ si el intervalo I_i está estrictamente a la izquierda del intervalo I_j; es decir, si $a_i + 1 < a_j$. Los posets que se pueden obtener de esta manera se conocen como **órdenes de intervalos unitarios**.

(a) Recuerde que el número de sucesiones de n 1's y n -1's cuyas sumas parciales son no negativas es igual al **número de Catalan**, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Encuentre una biyección entre estas sucesiones y los órdenes de n intervalos unitarios.

(b) Demuestre que $\mathbf{2}+\mathbf{2}$ y $\mathbf{3}+\mathbf{1}$ no son órdenes de intervalos unitarios. Concluya que un orden de intervalos unitarios no puede contener a $\mathbf{2}+\mathbf{2}$ o a $\mathbf{3}+\mathbf{1}$ como subposet.

(c) Demuestre que todos los posets libres de $\mathbf{2}+\mathbf{2}$ y $\mathbf{3}+\mathbf{1}$ son órdenes de intervalos unitarios. (Sugerencia: Use inducción sobre el número de elementos de P. Considere un elemento maximal z de P. Sea A el conjunto de elementos de P menores que z, y $B = P - A$. Demuestre que B es una anticadena. Ahora considere un conjunto $\mathcal{I}$ de intervalos que representan el poset $P - z$, y añada un intervalo I_z que corresponda al elemento z. Desafortunadamente, para que $\mathcal{I} \cup I_z$ represente a P, puede ser necesario cambiar un poco la posición de los intervalos de $\mathcal{I}$.)

3. El Método de Campos Finitos

Sea $\mathcal{A}$ un arreglo de hiperplanos en $\mathbb{R}^n$, tal que las ecuaciones que definen los hiperplanos tienen coeficientes enteros. El objetivo de este problema es encontrar un método para calcular el polinomio característico $\chi_{\mathcal{A}}(q)$.

La ecuación de cada hiperplano se puede considerar como una ecuación sobre el campo finito $\mathbb{F}_q$ de q elementos, donde q es un primo. Las n-tuplas que son soluciones de esta ecuación forman un hiperplano en el espacio $\mathbb{F}_q^n$. De este modo obtenemos un arreglo de hiperplanos $\mathcal{A}_q$ en $\mathbb{F}_q^n$.

(a) Explique brevemente por qué los posets de intersección $L_{\mathcal{A}}$ y $L_{\mathcal{A}_q}$ no siempre son isomorfos. Sin embargo, explique por qué, si q es suficientemente grande, $L_{\mathcal{A}} \cong L_{\mathcal{A}_q}$.

(b) Sea q un primo suficientemente grande. Explique por qué la intersección x contiene exactamente $q^{\dim x}$ de los puntos de $\mathbb{F}_q^n$. Sea

$$f(y) = \sum_{x \geq y \text{ en } L_{\mathcal{A}_q}} \mu(y,x) q^{\dim x},$$

de modo que $\chi_{\mathcal{A}}(q) = f(\hat{0})$. ¿Qué cuenta $f(y)$?
(Sugerencia: Use la fórmula de inversión de Möbius.)
Concluya que $\chi_{\mathcal{A}}(q)$ es el número de puntos de $\mathbb{F}_q^n$ que no están sobre ningún hiperplano de $\mathcal{A}_q$. Este es el **método de campos finitos para calcular polinomios característicos**.

(c) Use el método de campos finitos para calcular el polinomio característico del arreglo

$$\mathcal{H}_n : \qquad x_i = 0 \qquad (1 \leq i \leq n).$$

(d) Use el método de campos finitos para calcular el polinomio característico del **arreglo trenza**

$$\mathcal{B}_n : \qquad x_i = x_j \qquad (1 \leq i < j \leq n).$$

4. El Arreglo de Catalan

El **arreglo de Catalan** es el siguiente arreglo de $3\binom{n}{2}$ hiperplanos en $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{C}_n : \qquad x_i - x_j = -1, 0, 1 \qquad (1 \leq i < j \leq n).$$

(a) Dibuje el arreglo $\mathcal{C}_3$. (Para simplificar el dibujo, dibuje la proyección sobre el plano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, como hicimos en clase.) ¿Cuántas regiones tiene? ¿Cuántas regiones acotadas tiene? Usando estos dos cálculos y el teorema de Zaslavsky, calcule el polinomio característico $\chi_{\mathcal{C}_3}(q)$.

(b) Se tiene una colección de m puntos dispuestos alrededor de un círculo. Demuestre que el número de formas de colorear k de ellos de rojo, de modo que no haya dos puntos rojos consecutivos, es $f(m,k) = \frac{m}{m-k}\binom{m-k}{k}$.

(Sugerencia: Es más fácil demostrar que $(m-k)f(m,k) = m\binom{m-k}{k}$.)

(c) Use el método de campos finitos para concluir que

$$\chi_{\mathcal{C}_n}(q) = q(q-n-1)(q-n-2)(q-n-3)\cdots(q-2n+2)(q-2n+1).$$

(d) Use el teorema de Zaslavsky para concluir que $\mathcal{C}_n$ tiene $n!\,C_n$ regiones.

(e) Recuerde que el arreglo trenza $\mathcal{B}_n$ tiene $n!$ regiones; cada una de ellas corresponde a un ordenamiento de las variables $x_1, \ldots, x_n$. El arreglo de Catalan contiene a los hiperplanos del arreglo trenza; por simetría, los hiperplanos restantes parten cada una de estas regiones en C_n regiones más pequeñas. Observe esto en su dibujo del caso $n = 3$.

Concentremos nuestra atención en la región $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ de $\mathcal{B}_n$. El arreglo $\mathcal{C}_n$ divide a esta región en C_n regiones más pequeñas. Encuentre una biyección entre estas regiones y los órdenes de n intervalos unitarios.

Cada problema tiene un valor de 1.5 puntos, para un total posible de 6.0. La distribución de los puntos en cada problema es la siguiente.

- Problema 1: 0.2, 0.2, 0.4, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1.
- Problema 2: 0.5, 0.3, 0.7.
- Problema 3: 0.5, 0.6, 0.2, 0.2.
- Problema 4: 0.2, 0.4, 0.3, 0.1, 0.5.