Números de Catalán

Federico Ardila

6 de enero de 2016

Resumen

¿Qué tan probable es que una votación con 3030 participantes resulte en un empate, con 1515 SÍes y 1515 NOes? La respuesta es muy interesante, sobre todo cuando la independencia de Cataluña está en juego.

1. Un cafecito. Hace unos días volví a la casa después de una semana desconectado del mundo, y fui al café de la esquina. Luis, el dueño, me invitó a un café, y me dijo que me quería contar una noticia y hacerme una pregunta matemática.

2. ¿Catalunya Lliure? Cataluña lleva décadas debatiendo si se separa de España, y el movimiento independentista ha tomado mucho impulso en años recientes. En un esfuerzo por seguir en el poder, el presidente conservador Artur Mas formó la alianza *Junts pel Sí* con sectores de la izquierda catalana en favor de la independencia. Pero los números no dieron; les faltaron unos pocos asientos para obtener el control del parlamento. Para obtener esos asientos necesitaban una alianza insólita con la CUP, un pequeño partido político independentista y anticapitalista.

De repente la CUP se encontró en una inesperada situación de poder, y una gran encrucijada ideológica: ¿se aliarían con Mas, símbolo de la política tradicional a la que se oponen, para poder lograr la independencia de Cataluña?

El 27 de diciembre de 2015, en una Asamblea de la CUP, las 3030 miembros presentes (quienes, en consecuencia con sus principios feministas, usan el femenino para incluir a todos los géneros) emitieron sus votos. El resultado:

1515 a favor de Mas,   1515 en contra.

Al enterarse del resultado, toda Cataluña se preguntó, no sin cierta sospecha:

¡¿Cuál es la probabilidad de que se hubiera dado un empate?!

Algunos escépticos calcularon que la probabilidad era de 1 en 3031, y dijeron que el resultado era virtualmente imposible. Otros dijeron que el empate era igual de probable a que una moneda lanzada al aire cayera parada. La pregunta es muy interesante, y la respuesta es aún mejor.

3. Números de catalán. Supongamos que en una votación con $2m$ votantes, cada persona puede votar SÍ o NO.[1]

La probabilidad de que el resultado sea un empate de m SÍes y m NOes es de aproximadamente $1/\sqrt{m\pi}$.

Sí, esa es una pi: $\pi = 3.14159\ldots$. En el caso específico que nos interesa:

La probabilidad de que la CUP empatara con 1515 SÍes y 1515 NOes es de aproximadamente 1 en 69.

3.1. ¿Por qué $2m$ personas? Luis me decía, muerto de la risa: "Imagínate a una miembro de la CUP que se haya despertado tarde y no haya alcanzado a votar ese día. ¡Hubiera podido decidir ella sola el destino de Cataluña!" Para que un empate sea posible, el número de votantes debe ser un número par, digamos $2m$.

3.2. ¿Por qué $1/\sqrt{m\pi}$? Podemos registrar los $2m$ votos, en el orden en que van entrando: SÍ, SÍ, NO, SÍ, NO, etc. Cada votante tiene dos opciones (SÍ o NO), para un total de $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^{2m}$ votaciones posibles.

Las votaciones que llevan a un empate son las que tienen m SÍes y m NOes, y corresponden a las maneras de elegir m votantes (de las $2m$ posibles) que voten SÍ; las demás votarán NO. Este número de elecciones tiene un nombre: $\binom{2m}{m}$, que se lee $2m$ *combinado con* m. Existe una fórmula que les podría explicar si tuviéramos un poquito más de tiempo: el número de empates posibles es $\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{m!m!}$, donde $n!$ denota al número n *factorial*, que es $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$. Por lo tanto tenemos:

$$\text{probabilidad de un empate} = \frac{(\#\text{ de empates posibles})}{(\#\text{ de votaciones posibles})} = \frac{(2m)!}{m!m!\,2^{2m}} \tag{1}$$

En el caso de Cataluña, si uno tiene un computador a la mano, puede preguntarle cuánto da esto para $2m = 3030$, y obtiene $1.44938\ldots\%$. Pero yo, que andaba desconectado, había dejado mi teléfono en la casa, entonces tuve que hacer la cuenta en la servilleta. (Tenía que merecerme el café gratis, ¿no?)

Por suerte, Stirling descubrió una aproximación muy útil:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \tag{2}$$

donde $\approx$ significa *es casi igual a*. Demostrar esta fórmula requiere un poco de cálculo. Aunque se las he mostrado a mis estudiantes muchas veces, nunca deja de sorprenderme. ¿Qué hacen ahí $e = 2.71828\ldots$ y $\pi = 3.14159\ldots$, los dos números favoritos de las matemáticas?

[1] Como explicaremos en la Sección 3.3, estamos asumiendo más sobre la votación.

Usando la fórmula de Stirling (2) podemos simplificar la probabilidad (1). Mi esposa estaba en el café conmigo y aprovechó para desempolvar su álgebra. Ustedes deberían hacerlo también, sobre todo si son de los que disfrutan de arreglar su escritorio cuando está muy desordenado, botando todo lo que no necesitan y poniendo todo lo demás en su sitio. El resultado final es:

$$\text{probabilidad de un empate} = \frac{(2m)!}{m!m!\,2^{2m}} \approx \frac{1}{\sqrt{m\pi}}.$$

Esto sí lo pudimos estimar a mano para $2m = 3030$:

$$\sqrt{1515\pi} \approx \sqrt{(\text{más de } 1500)(\text{más de } 3)} \approx \sqrt{\text{por ahí } 4900} \approx \text{por ahí } 70$$

es decir que la probabilidad de un empate es más o menos de 1 en 70. En efecto, ahora que estoy en frente de un computador, veo que

$$\tfrac{1}{\sqrt{1515\pi}} \approx \tfrac{1}{68.989\ldots} \approx 1.44950\ldots\%.$$

Es importante que nos preguntemos: ¿qué tan buena es la aproximación de Stirling? ¡Es muy buena! Para $2m = 3030$:

$$\text{probabilidad real de un empate} = \tbinom{3030}{1515}/2^{3030} \approx 1.44938\ldots\%$$

$$\text{aproximación de Stirling} = 1/\sqrt{1515\pi} \approx 1.44950\ldots\%.$$

3.3. La letra chica. ¿Qué significa decir que la probabilidad de un empate sea de 1 en 69? No le vamos a pedir a la CUP que vote 69 veces, a ver si empatan exactamente una vez.

La única manera de darle un significado a esta afirmación es elegir un modelo de cómo vota la gente. Nuestro modelo para obtener $1/69$ es que cada persona decide independientemente, y vota SÍ o NO con igual probabilidad de $1/2$. Para obtener una probabilidad de $1/3031$, los escépticos seguramente supusieron que el número de SÍes tiene la misma probabilidad de ser $0, 1, 2, \ldots, 3029$ o 3030; esto no parece tener ningún fundamento.

Obviamente nuestro modelo tampoco es exactamente correcto, aunque el resultado final de 1515 SÍes y 1515 NOes no lo hace parecer completamente descabellado. Ningún modelo del comportamiento humano será exactamente correcto. Nuestra práctica como matemáticos es escoger un modelo que se acerque a la realidad y que permita ser analizado. Esta práctica va de la mano con una gran responsabilidad: cuestionar críticamente todo modelo matemático, especialmente cuando sus resultados afectan nuestras vidas. [1] En ese sentido, esta nota es tan sólo el comienzo de un análisis riguroso.

4. Números de Catalan. Yo soy combinatorio y no puedo contar esta historia sin hablar de los números de Catalan. Pido un poco de licencia poética-matemática.

Imaginemos que una independentista a morir supervisó la votación de la CUP. Mientras contaba los votos uno por uno, ella se dio cuenta que el SÍ **nunca** iba perdiendo. Su decepción y sorpresa fueron enormes cuando vio que el resultado final fue un empate. ¿Cuál era la probabilidad de que los 1515 SÍes y 1515 NOes se organizaran de esa manera, siempre alimentando su optimismo?

Si $2m$ personas votan SÍ o NO en unas elecciones que terminan empatadas,
hay una probabilidad de 1 en $m+1$ de que
el SÍ nunca vaya perdiendo al ir contando los votos en orden.

En el voto de la CUP, la probabilidad sería de 1 en 1516.

De hecho, el número de votaciones que terminan empatadas, donde el SÍ en ningún momento va perdiendo, es conocido como el *número de Catalan.* (Ninguna relación con Cataluña.) Si tuviéramos un poco más de tiempo, les explicaría por qué este número es igual a $\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}$.

Los números de Catalan fueron descubiertos por Ming'antu en Mongolia y Euler en Prusia en el siglo 18; llevan el nombre del belga Eugène Catalan. Estos números aparecen hasta en la sopa. Así como los poetas consultan el diccionario, los combinatorios consultamos la Enciclopedia en Línea de Sucesiones de Enteros (`www.oeis.org`); la entrada de la sucesión de Catalan $1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \ldots$ ocupa 20 páginas y sigue creciendo. A esta sucesión, Richard Stanley le dedicó una colección [2, Capítulo 6] de más de 200 apariciones, un libro [3] (que incluye trabajos de los catalanes Anna de Mier, Sergi Elizalde y Marc Noy), y un chiste:

> [2, Problema 6.24] Explica el significado de la siguiente sucesión:
> un, dos, tres, quatre, cinc, sis, set, vuit, nou, deu, ...

5. El desenlace. En el desempate del 3 de enero, la dirección de la CUP decidió no apoyar a Mas ,con 36 NOes, 30 SÍes, y una abstención. (Parece ser que alguien no quería que hubiera desempate.) El 9 de enero de 2016, tras extensas negociaciones, Mas renunció a la reelección como presidente de Cataluña, y la CUP se unió a la coalición *Junts pel Sí*, que así obtiene el control del parlamento; un gran triunfo para el proyecto independentista. Al final, esto es más que una curiosa anécdota matemática. Es probable que esta alianza, nacida y moldeada por la aritmética del sistema parlamentario, resulte jugar un papel muy importante en el futuro político de Cataluña.

Referencias

[1] Darrell Huff. Cómo mentir con estadísticas. Editorial Crítica, 2011.

[2] R. Stanley. Enumerative Combinatorics Vol. 2. Cambridge University Press, 2001.

[3] R. Stanley. Catalan Numbers. Cambridge University Press, 2015.