

# ¿Cómo usamos la forma para conocer el mundo?

Federico Ardila M.

San Francisco State University, San Francisco, California.  
Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia.

Parque Explora - Ciencia en Bicicleta  
Medellín, 23 de junio de 2016

## ENCUENTRO COLOMBIANO DE COMBINATORIA.

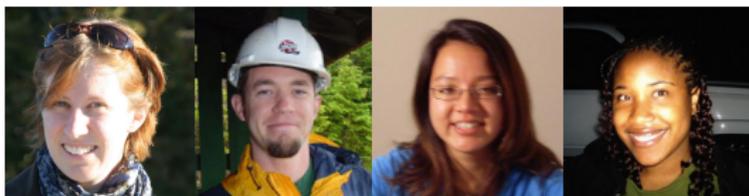


## CLUBES DE CIENCIA COLOMBIA.



## 2007-2016, en conjunto con :

- Megan Owen (CUNY), Seth Sullivant (SFSU/Berkeley/NCSU)
- Rika Yatchak (SFSU/Linz), Tia Baker (SFSU)
- Diego Cifuentes (Andes/MIT), Steven Collazos (SFSU/Minnesota)
- Hanner Bastidas (U. Valle), Cesar Ceballos (Andes/Berlin/Vienna)
- Matthew Bland, John Guo, Maxime Pouokam (SFSU)
- Anastasia Chavez (Berkeley), Sandra Zuñiga (SFSU)



## 1. ROBOTS.



Ford 1910



Tesla 2016

# 1. ROBOTS EN MEDELLÍN.

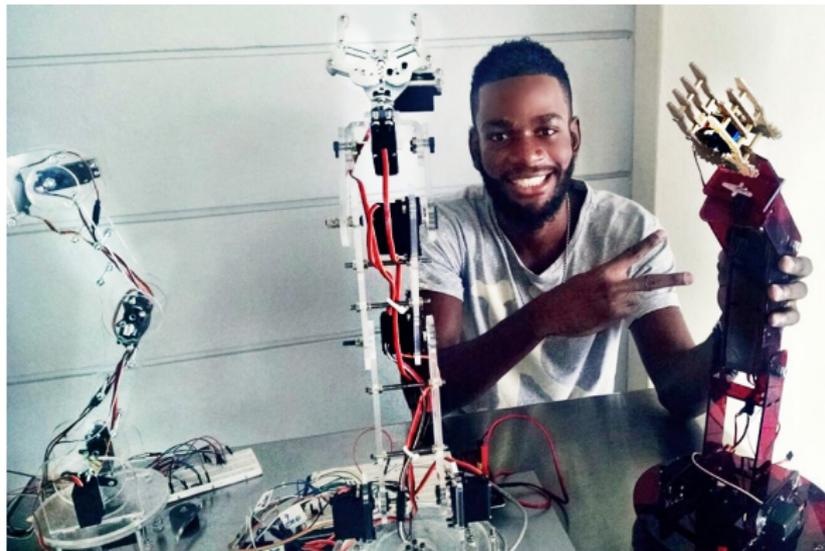


Proyecto Primavera

Jorge Andrés Barrera

Medellín → MIT → EAFIT / EPM

# 1. ROBOTS EN MEDELLÍN.



Arlys Javier Asprilla

Istmina → ITM → ...





## 2. MAPAS.

¿Muy difícil? Una más fácil:

¿Cómo llegue aquí hoy?

Universidad Nacional → Parque Explora



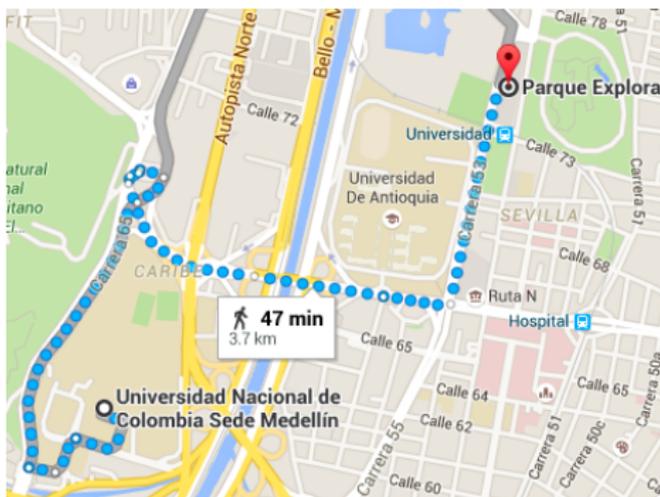


## 2. MAPAS.

**Motivación: una pregunta más fácil.**

¿Cómo llegue aquí hoy, **de manera óptima?**

Con un mapa!



Vamos a hacer lo mismo.

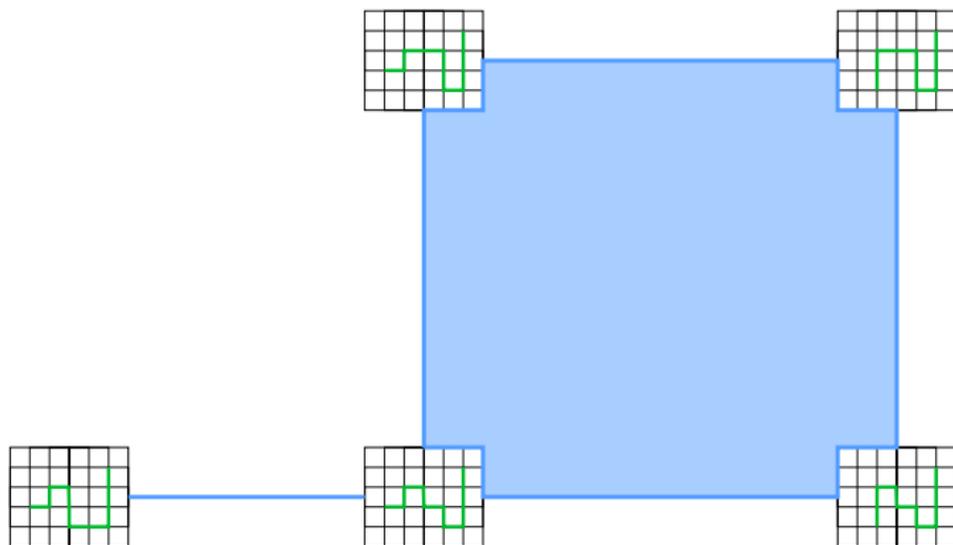
Vamos a construir un mapa para el problema del robot.



## 2. MAPAS DE MUNDOS ROBÓTICOS.

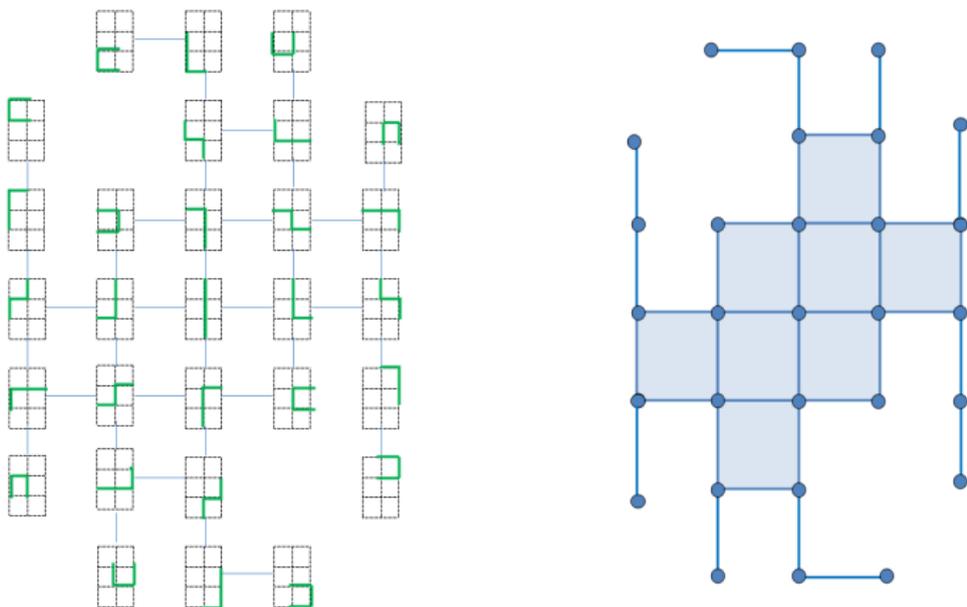
Vamos a construir un mapa de todas las posiciones del robot.

Un pedacito:



## 2. MAPAS DE MUNDOS ROBÓTICOS.

Vamos a construir un mapa de todas las posiciones del robot.

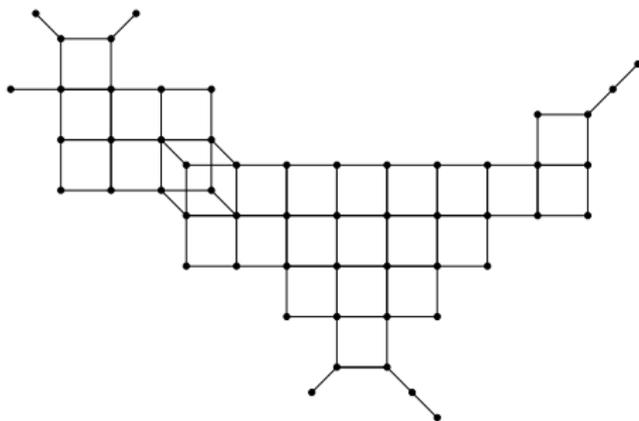
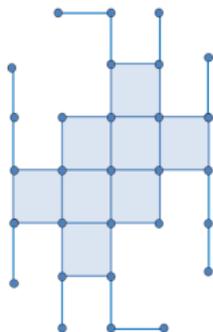


Un espacio “**cúbico negativo**”!  
¿Cómo los entendemos? ¿Cómo los navegamos?

## 2. MAPAS DE MUNDOS ROBÓTICOS.

Para saber mover un robot, necesitamos:

- **entender** y **navegar** los espacios negativos



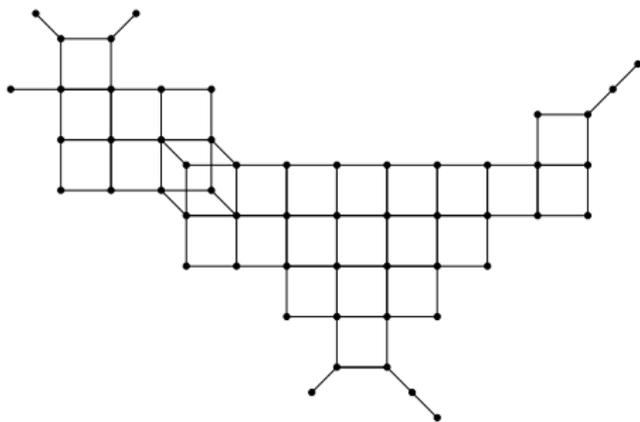
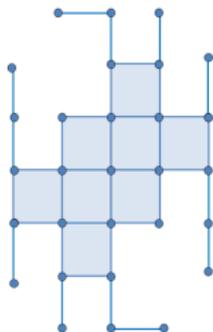
**Obstáculos:**

- Demasiados vértices.
- Dimensión demasiado alta.
- Ramificación demasiado complicada.

## 2. MAPAS DE MUNDOS ROBÓTICOS.

Para saber mover un robot, necesitamos:

- **entender** y **navegar** los espacios negativos



### Obstáculos:

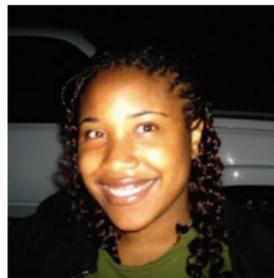
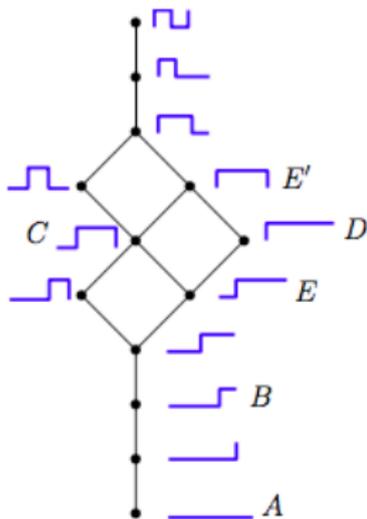
- Demasiados vértices.
- Dimensión demasiado alta.
- Ramificación demasiado complicada.

## 2. MAPAS DE MUNDOS ROBÓTICOS.

### EJEMPLO 1. Un brazo robótico en un túnel de ancho 1.

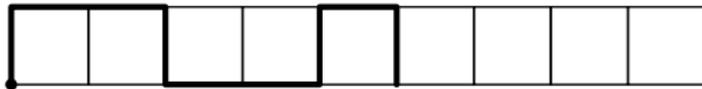


Mapa del brazo de largo 5 (F.A., Tia Baker, Rika Yatchak, 2014)

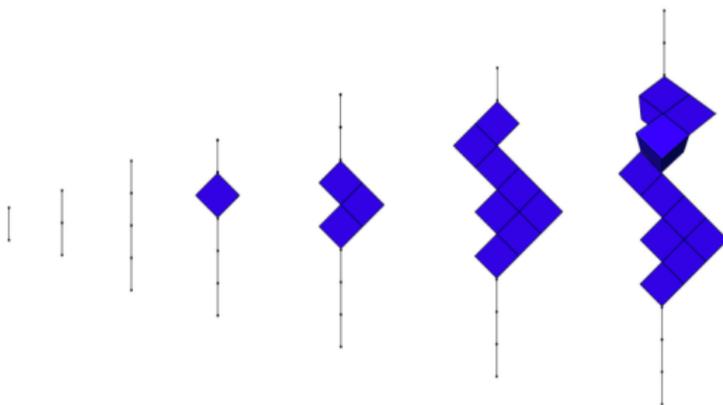


## 2. MAPAS DE MUNDOS ROBÓTICOS.

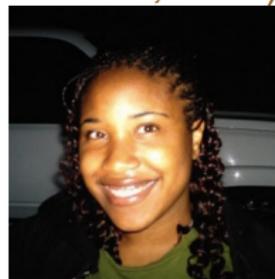
### EJEMPLO 1. Un brazo robótico en un túnel de ancho 1.



Mapas: largo 1,2,3,4,5,6,7 (F.A., Tia Baker, Rika Yatchak, 2014)



# de esquinas: 2,3,5,8,13,21,34,...





## 2. MAPAS DE MUNDOS ROBÓTICOS.

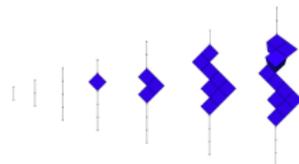
### EJEMPLO 1. Un brazo robótico en un túnel de ancho 1.



# de esquinas del mapa: 2,3,5,8,13,21,34,...

Estos son #s de Fibonacci!

Son **MUY** bonitos, pero **MUY** grandes!

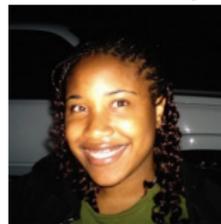


Mapa para el brazo de largo 100:

- esquinas: 354' 224,848' 179,261' 915,075
- dimensión: 34

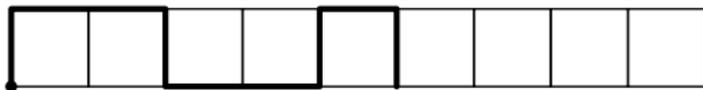
¿Qué forma tiene ese espacio?

¿Cómo lo navegamos?



## 2. MAPAS DE MUNDOS ROBÓTICOS.

### EJEMPLO 1. Un brazo robótico en un túnel de ancho 1.



# de esquinas del mapa: 2,3,5,8,13,21,34,...

Estos son #s de Fibonacci!

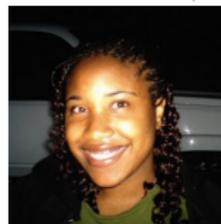
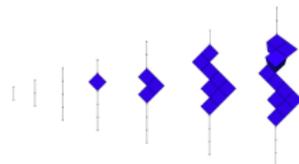
Son **MUY** bonitos, pero **MUY** grandes!

Mapa para el brazo de largo 100:

- esquinas: 354' 224,848' 179,261' 915,075
- dimensión: 34

¿Qué forma tiene ese espacio?

¿Cómo lo navegamos?



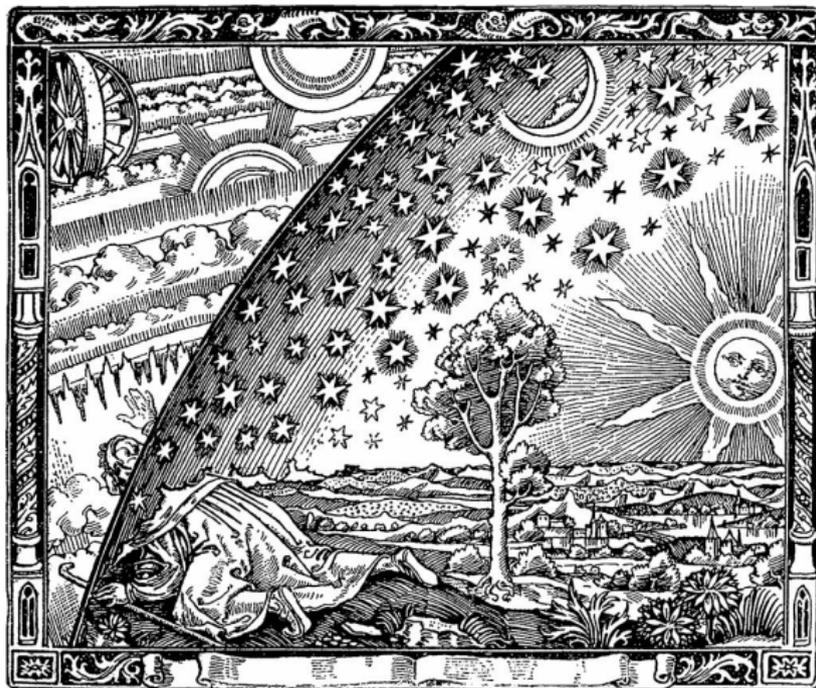
### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

¿La tierra es plana?



### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

¿La tierra es redonda?



### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

¿La tierra es esférica?

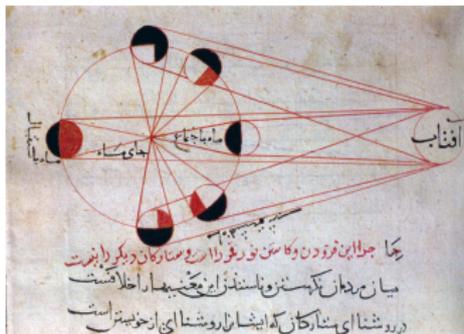


### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

La tierra es (casi) esférica. ¿Cuánto mide? **GEOMETRÍA**

Radio: **Entre 6,353 y 6,384 km.**

- **Eratóstenes: 250,000 estadios**  
(Libia → Egipto: 276 a.C. - 194 a.C.)



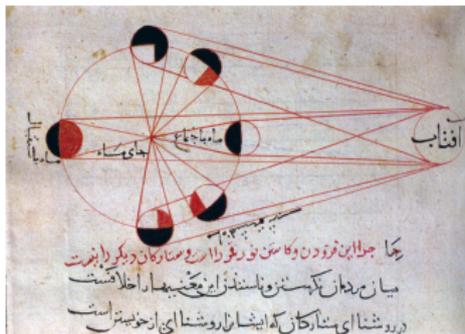
- **Abu Rayhan Muhammad ibn Ahmad Al-Biruni: 6,340 km**  
(Uzbekistan → Afghanistan 973-1048)
- **Ustedes: ???**  
(Planetario de Medellín, 21 de junio, 10:30am-1:00pm.)

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

La tierra es (casi) esférica. ¿Cuánto mide? **GEOMETRÍA**

Radio: **Entre 6,353 y 6,384 km.**

- **Eratóstenes: 250,000 estadios**  
(Libia → Egipto: 276 a.C. - 194 a.C.)



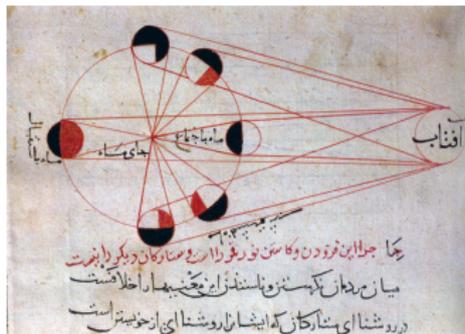
- **Abu Rayhan Muhammad ibn Ahmad Al-Biruni: 6,340 km**  
(Uzbekistan → Afghanistan 973-1048)
- **Ustedes: ???**  
(Planetario de Medellín, 21 de junio, 10:30am-1:00pm.)

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

La tierra es (casi) esférica. ¿Cuánto mide? **GEOMETRÍA**

Radio: **Entre 6,353 y 6,384 km.**

- **Eratóstenes: 250,000 estadios**  
(Libia → Egipto: 276 a.C. - 194 a.C.)



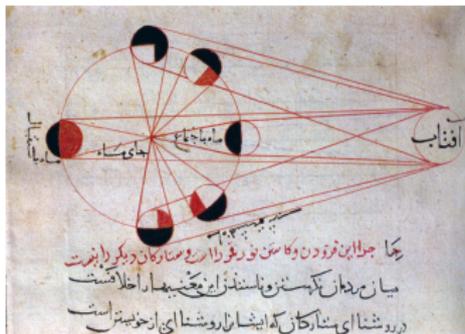
- **Abu Rayhan Muhammad ibn Ahmad Al-Biruni: 6,340 km**  
(Uzbekistan → Afghanistan 973-1048)
- **Ustedes: ???**  
(Planetario de Medellín, 21 de junio, 10:30am-1:00pm.)

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

La tierra es (casi) esférica. ¿Cuánto mide? **GEOMETRÍA**

Radio: **Entre 6,353 y 6,384 km.**

- **Eratóstenes: 250,000 estadios**  
(Libia → Egipto: 276 a.C. - 194 a.C.)



- **Abu Rayhan Muhammad ibn Ahmad Al-Biruni: 6,340 km**  
(Uzbekistan → Afghanistan 973-1048)
- **Ustedes: ???**  
(Planetario de Medellín, 21 de junio, 10:30am-1:00pm.)

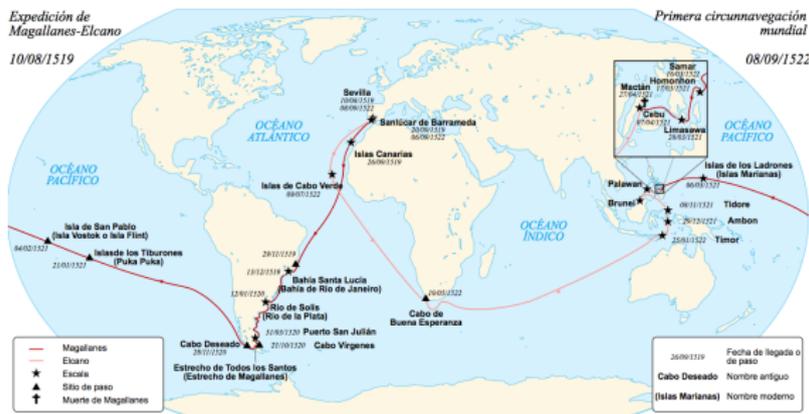
### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

Matemáticos y científicos: ¡La tierra es redonda!

Exploradores: ¡Podemos explorarla!

Comerciantes: ¡Podemos sacarle provecho a eso!

Políticos: ¡Podemos conquistarla!



La matemática es una herramienta. Tenemos que pensar críticamente y cuestionar constantemente cómo la usamos.

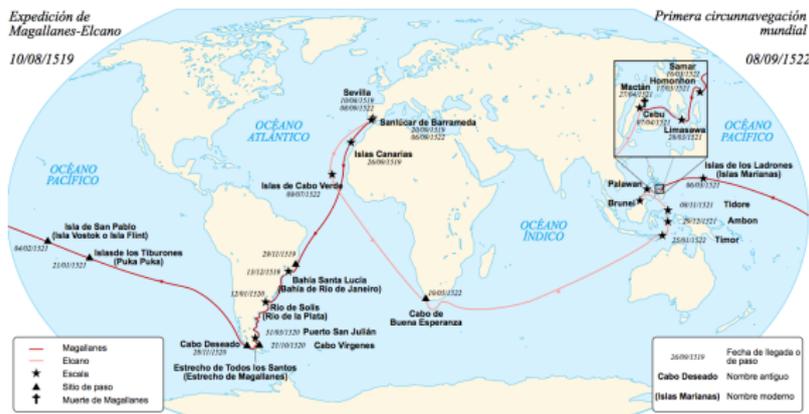
### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

Matemáticos y científicos: ¡La tierra es redonda!

Exploradores: ¡Podemos explorarla!

Comerciantes: ¡Podemos sacarle provecho a eso!

Políticos: ¡Podemos conquistarla!



La matemática es una herramienta. Tenemos que pensar críticamente y cuestionar constantemente cómo la usamos.

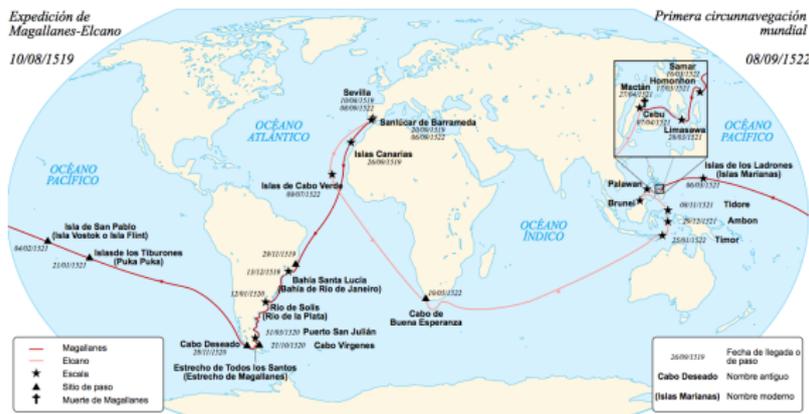
### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

Matemáticos y científicos: ¡La tierra es redonda!

Exploradores: ¡Podemos explorarla!

Comerciantes: ¡Podemos sacarle provecho a eso!

Políticos: ¡Podemos conquistarla!



La matemática es una herramienta. Tenemos que pensar críticamente y cuestionar constantemente cómo la usamos.

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

Matemáticos y científicos: ¡La tierra es redonda!

Exploradores: ¡Podemos explorarla!

Comerciantes: ¡Podemos sacarle provecho a eso!

Políticos: ¡Podemos conquistarla!



La matemática es una herramienta. Tenemos que pensar críticamente y cuestionar constantemente cómo la usamos.

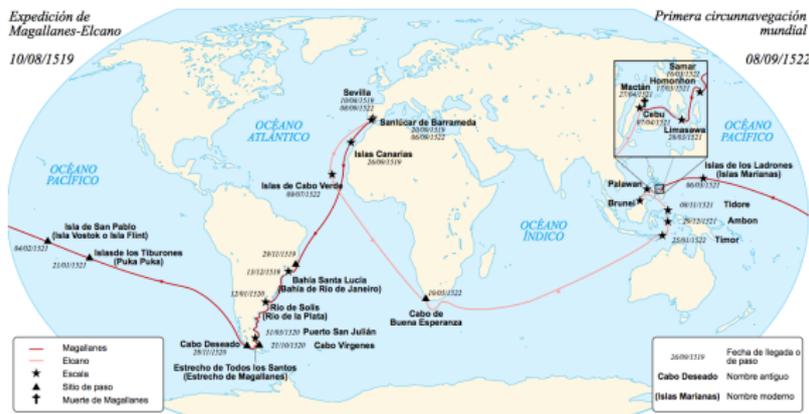
### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

Matemáticos y científicos: ¡La tierra es redonda!

Exploradores: ¡Podemos explorarla!

Comerciantes: ¡Podemos sacarle provecho a eso!

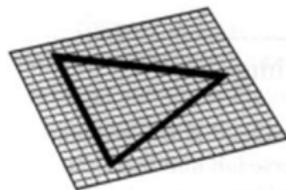
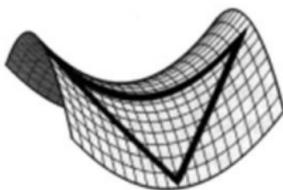
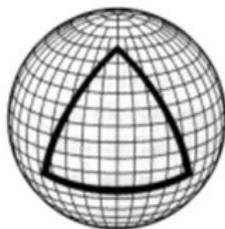
Políticos: ¡Podemos conquistarla!



La matemática es una herramienta. Tenemos que pensar críticamente y cuestionar constantemente cómo la usamos.

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

Curvatura:



Curvatura:

positiva

negativa

cero

Triángulos:

gordos

flacos

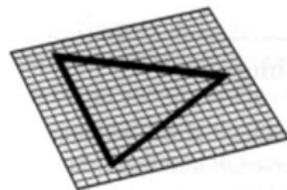
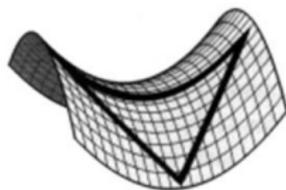
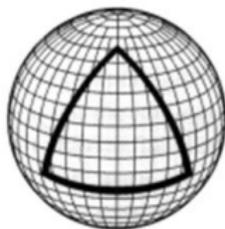
planos

La tierra tiene curvatura **positiva**.

¿¿Cuál es la curvatura del universo??

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

Curvatura:



Curvatura:

positiva

negativa

cero

Triángulos:

gordos

flacos

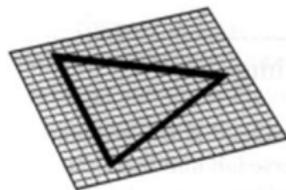
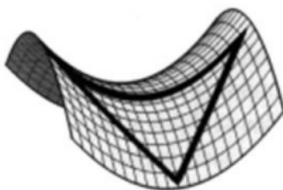
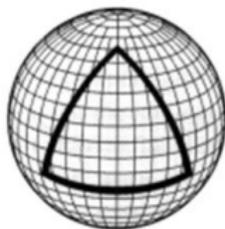
planos

La tierra tiene curvatura **positiva**.

¿¿Cuál es la curvatura del universo??

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

Curvatura:



Curvatura:

positiva

negativa

cero

Triángulos:

gordos

flacos

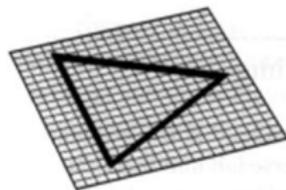
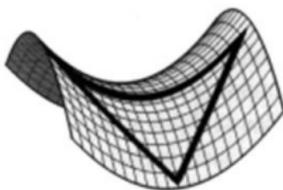
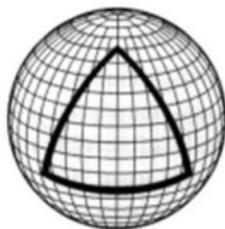
planos

La tierra tiene curvatura **positiva**.

¿¿Cuál es la curvatura del universo??

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

Curvatura:



Curvatura:

positiva

negativa

cero

Triángulos:

gordos

flacos

planos

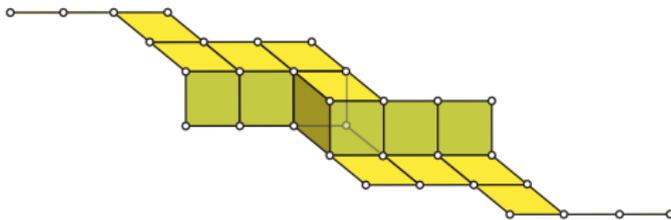
La tierra tiene curvatura **positiva**.

¿¿Cuál es la curvatura del universo??

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

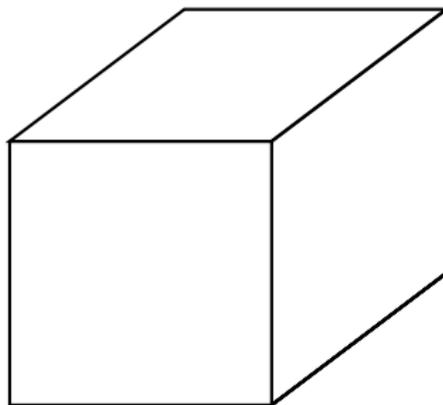
Espacio cúbico:

segmentos/cuadrados/cubos/... de lado 1 pegados cara a cara.



### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

**Ejemplo 1.** La esquina de una caja.

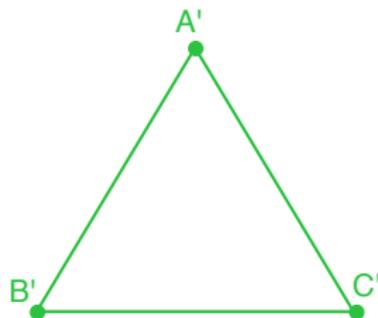
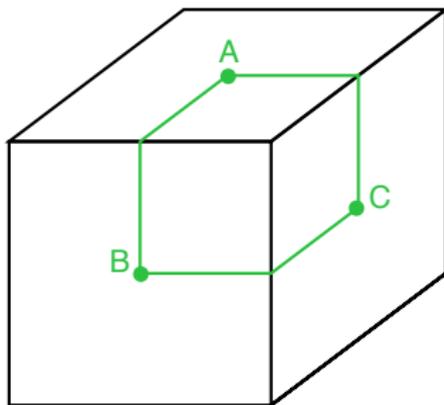


¿Es positivo, negativo, o cero?

(¿Se parece más a un balón, una silla de montar, o un plano?)

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

**Ejemplo 1.** La esquina de una caja.



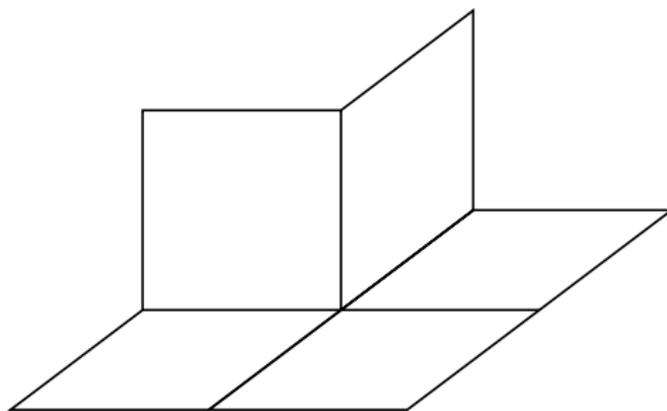
$|AB| = |BC| = |CA| = 1.$  →  
El triángulo **es gordo.** →

$|A'B'| = |B'C'| = |C'A'| = 1.$   
El espacio **es positivo.**

(Pero falta mirar muchos triángulos.)

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

**Ejemplo 2.** La esquina de un corredor.

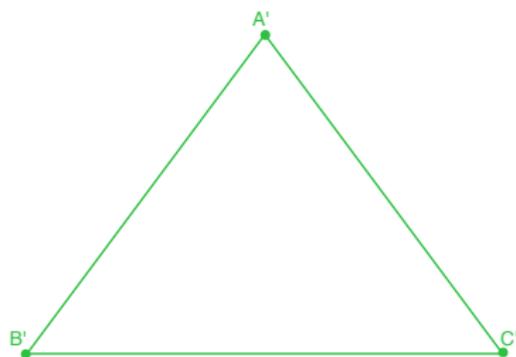
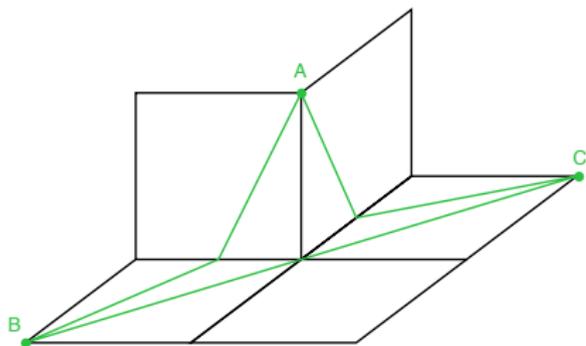


¿Es positivo, negativo, o cero?

(¿Se parece más a un balón, una silla de montar, o un plano?)

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

**Ejemplo 2.** La esquina de un corredor.



$$\begin{array}{l}
 |AB| = |AC| = \sqrt{5} \\
 |BC| = 2\sqrt{2}
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 |A'B'| = |A'C'| = \sqrt{5} \\
 |B'C'| = 2\sqrt{2}
 \end{array}$$

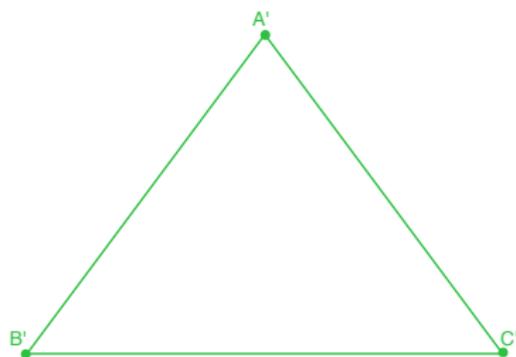
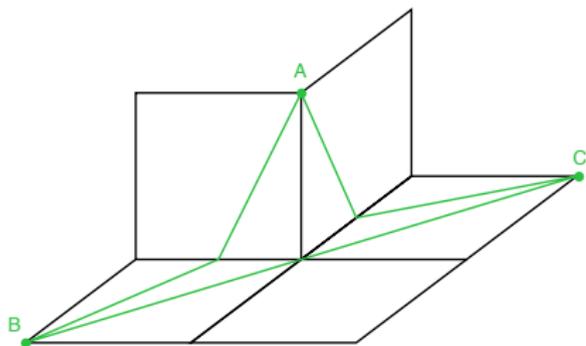
El triángulo **sí es flaco**.

El espacio **sí es negativo**. (Pero falta mirar muchos triángulos.)

Saber si un espacio es negativo no es fácil!

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

**Ejemplo 2.** La esquina de un corredor.



$$\begin{array}{l}
 |AB| = |AC| = \sqrt{5} \\
 |BC| = 2\sqrt{2}
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 |A'B'| = |A'C'| = \sqrt{5} \\
 |B'C'| = 2\sqrt{2}
 \end{array}$$

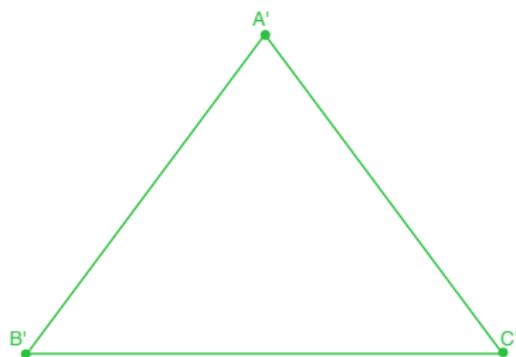
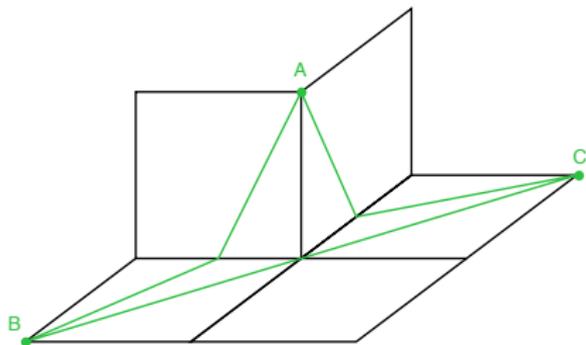
El triángulo **sí es flaco**.

El espacio **sí es negativo**. (Pero falta mirar muchos triángulos.)

Saber si un espacio es negativo no es fácil!

### 3. ¿CUÁL ES LA FORMA DEL MUNDO?

**Ejemplo 2.** La esquina de un corredor.



$$\begin{array}{l}
 |AB| = |AC| = \sqrt{5} \\
 |BC| = 2\sqrt{2}
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 |A'B'| = |A'C'| = \sqrt{5} \\
 |B'C'| = 2\sqrt{2}
 \end{array}$$

El triángulo **sí es flaco**.

El espacio **sí es negativo**. (Pero falta mirar muchos triángulos.)

Saber si un espacio es negativo no es fácil!

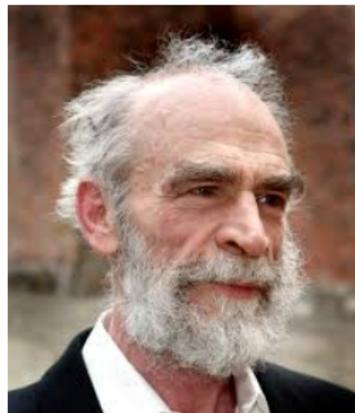
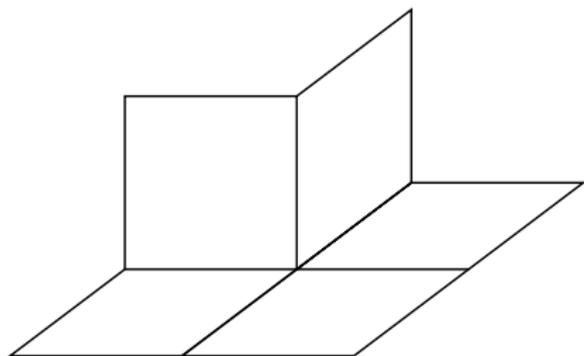
## 4. PASAME EL CONTROL.

Es muy difícil saber si un espacio es negativo.

**Mikhail Gromov:** (Premio Abel 2009)

No es tan difícil saber si un espacio cúbico es negativo.

- “Sólo” combinatoria y topología.
- No hay que medir nada.



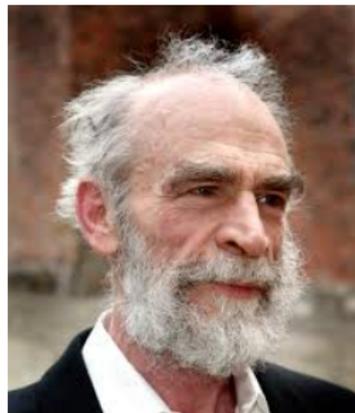
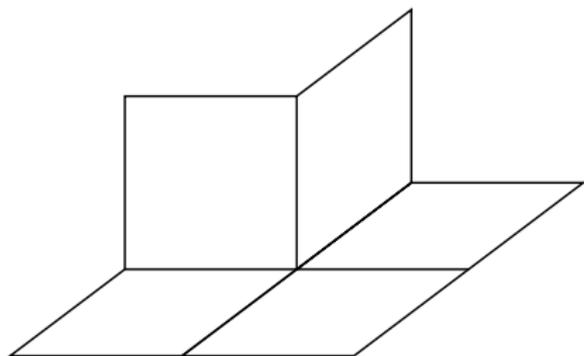
## 4. PASAME EL CONTROL.

Es muy difícil saber si un espacio es negativo.

**Mikhail Gromov:** (Premio Abel 2009)

No es tan difícil saber si un espacio **cúbico** es negativo.

- “Sólo” combinatoria y topología.
- No hay que medir nada.



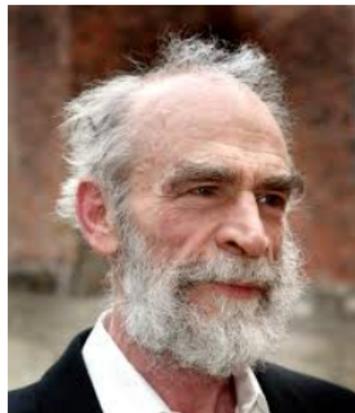
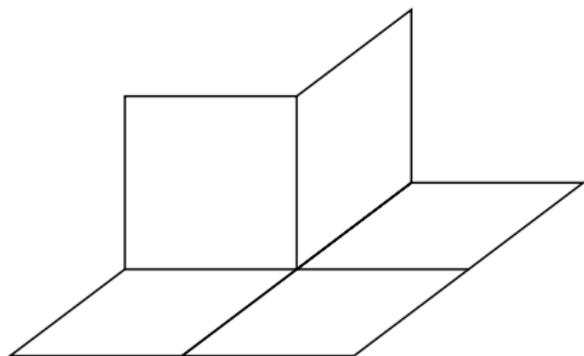
## 4. PASAME EL CONTROL.

Es muy difícil saber si un espacio es negativo.

**Mikhail Gromov:** (Premio Abel 2009)

No es tan difícil saber si un espacio **cúbico** es negativo.

- “Sólo” combinatoria y topología.
- No hay que medir nada.



## 4. PASAME EL CONTROL.

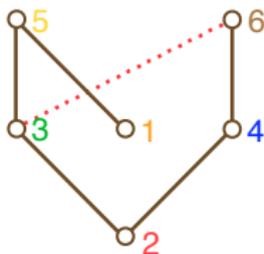
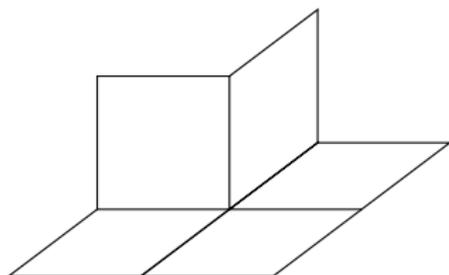
Gromov:

No es tan difícil saber si un espacio **cúbico** es negativo.

F.A., Megan Owen, Seth Sullivant (2008)

Los espacios cúbicos negativos son los que tienen control remoto.

- “Sólo” combinatoria.



## 4. PASAME EL CONTROL.

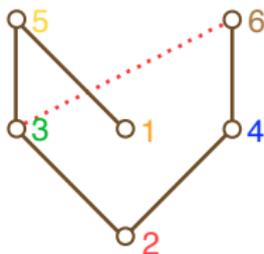
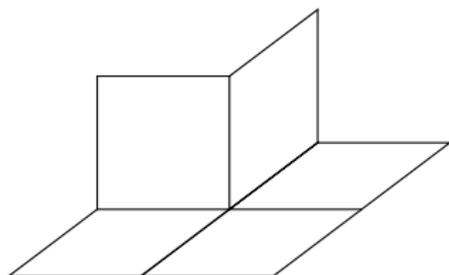
Gromov:

No es tan difícil saber si un espacio cúbico es negativo.

F.A., Megan Owen, Seth Sullivant (2008)

Los espacios cúbicos negativos son los que tienen control remoto.

- “Sólo” combinatoria.



## 4. PASAME EL CONTROL.

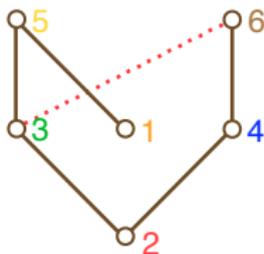
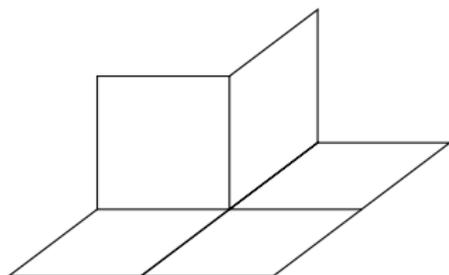
Gromov:

No es tan difícil saber si un espacio **cúbico** es negativo.

F.A., Megan Owen, Seth Sullivant (2008)

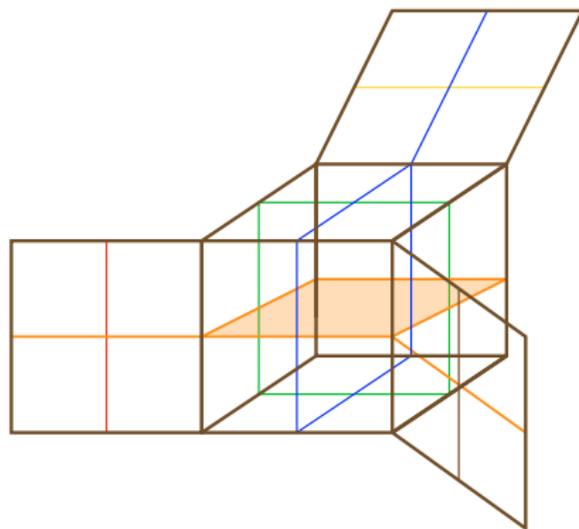
Los espacios cúbicos negativos son los que tienen control remoto.

- “Sólo” combinatoria.



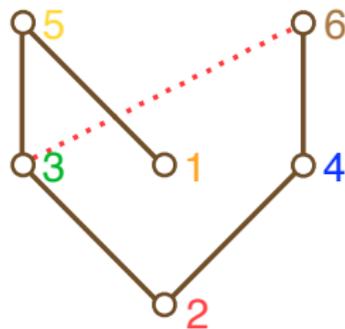
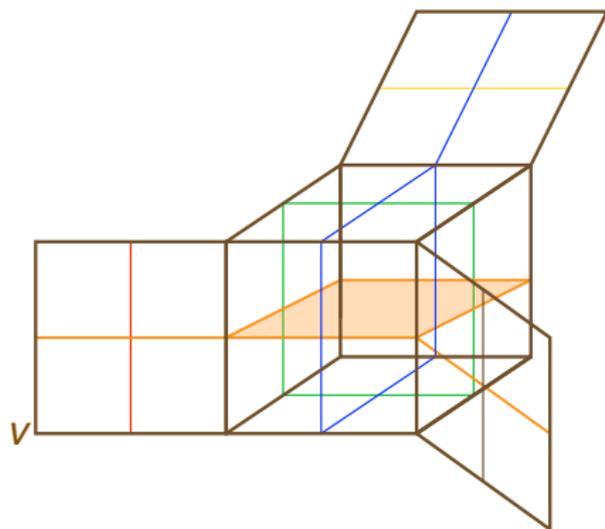
## 4. PASAME EL CONTROL.

Cómo armar el control remoto de un espacio cúbico negativo:



Sageev (95): Estos espacios tienen **muros invisibles**.

## 4. PASAME EL CONTROL REMOTO.



Me paro en una esquina  $v$ . El control remoto tiene:

- Un botón por cada muro.
- $i$  —————  $j$  si debo cruzar  $i$  antes que  $j$
- $i$  .....  $j$  si no puedo cruzar  $i$  y  $j$

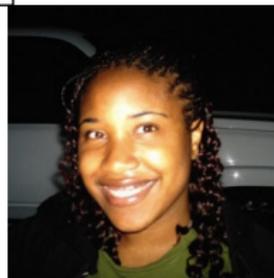
## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

EJEMPLO 1. El brazo robótico en un túnel de ancho 1.



Mapa: **ENORME** y de **muy alta dimensión**.

Control remoto: **grandecito y bien sencillo!**  
(F.A., Tia Baker, Rika Yatchak, 2014)



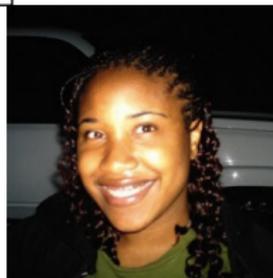
## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

EJEMPLO 1. El brazo robótico en un túnel de ancho 1.



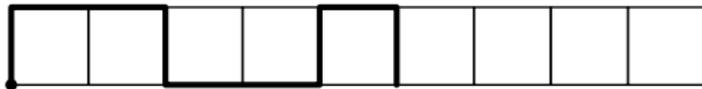
Mapa: **ENORME** y de **muy alta dimensión**.

Control remoto: **grandecito** y **bien sencillo!**  
(F.A., Tia Baker, Rika Yatchak, 2014)



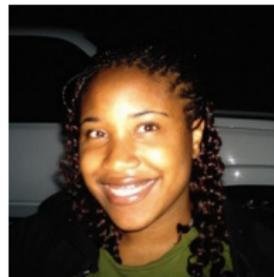
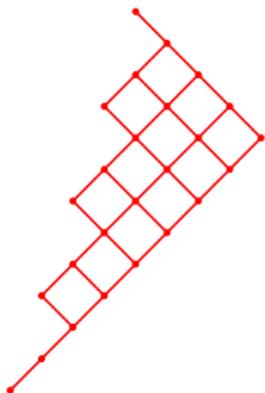
## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

EJEMPLO 1. El brazo robótico en un túnel de ancho 1.



Mapa: **ENORME** y de **muy alta dimensión**.

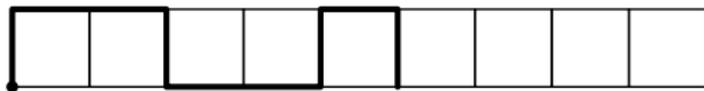
Control remoto: **grandecito** y **bien sencillo**!



(F.A., Tia Baker, Rika Yatchak, 2014)

## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

EJEMPLO 1. El brazo robótico en un túnel de ancho 1.



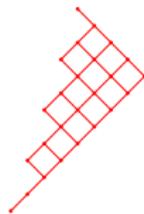
Para 100 articulaciones:

Mapa: **ENORME** y de **muy alta dimensión**.

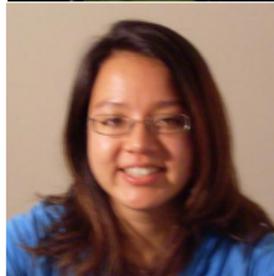
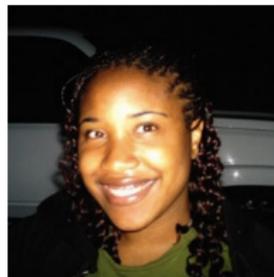
- esquinas: 354' 224,848' 179,261' 915,075
- dimensión: 34

Control remoto: **grandecito** y **bien sencillo**!

- botones: 251,001
- dimensión: 2



(F.A., Tia Baker, Rika Yatchak, 2014)



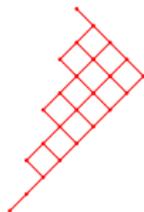
## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

EJEMPLO 1. El brazo robótico en un túnel de ancho 1.



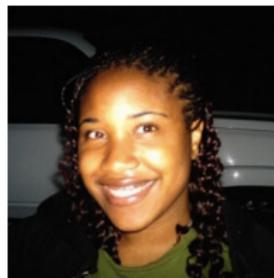
Mapa: **ENORME** y de **muy alta dimensión**.

Control remoto: **grandecito** y **bien sencillo**!



(F.A., Tia Baker, Rika Yatchak, 2014)

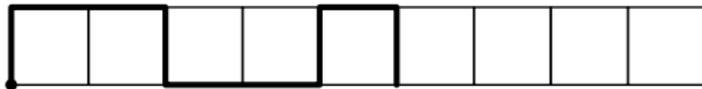
- Este "mundo robótico" es negativo.
- Podemos mover el robot eficientemente.



**OJO**: La curvatura negativa es esencial!

## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

EJEMPLO 1. El brazo robótico en un túnel de ancho 1.



Mapa: **ENORME** y de **muy alta dimensión**.

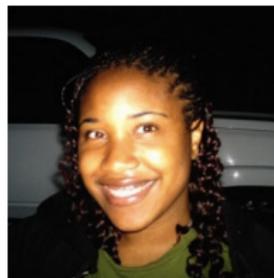
Control remoto: **grandecito** y **bien sencillo**!



(F.A., Tia Baker, Rika Yatchak, 2014)

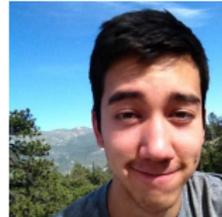
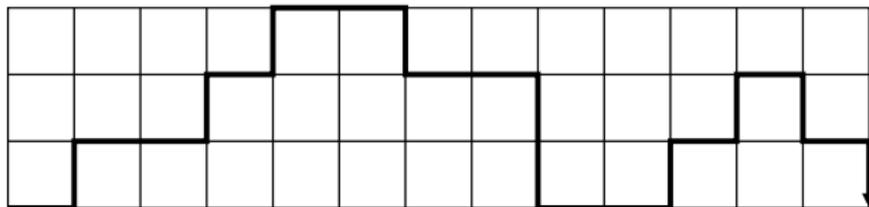
- Este “mundo robótico” es negativo.
- Podemos mover el robot eficientemente.

**OJO**: La curvatura negativa es esencial!



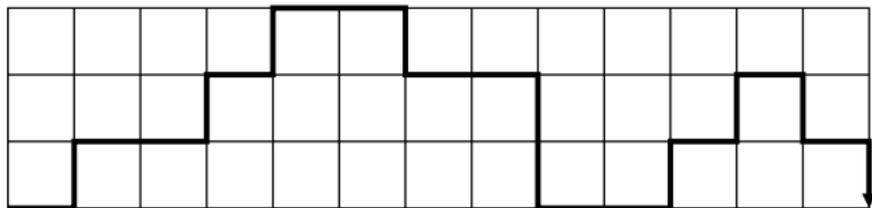
## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

EJEMPLO 2. El brazo robótico en cualquier túnel rectangular.  
(FA, Hanner Bastidas, Cesar Ceballos, John Guo, 2016)

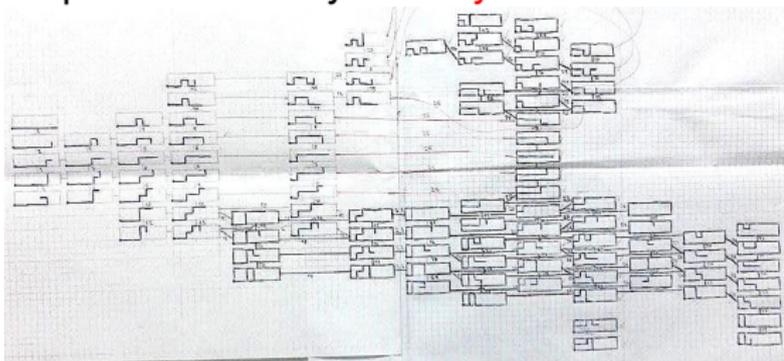


## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

EJEMPLO 2. El brazo robótico en cualquier túnel rectangular.  
(FA,Hanner Bastidas,Cesar Ceballos,John Guo,2016)



Mapa: **ENORME** y de **muy alta dimensión**.

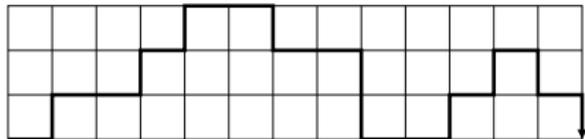


Control remoto: ¿grandecito y bien sencillo?



## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

EJEMPLO 2. El brazo robótico en cualquier túnel rectangular.  
(FA, Hanner Bastidas, Cesar Ceballos, John Guo, 2016)

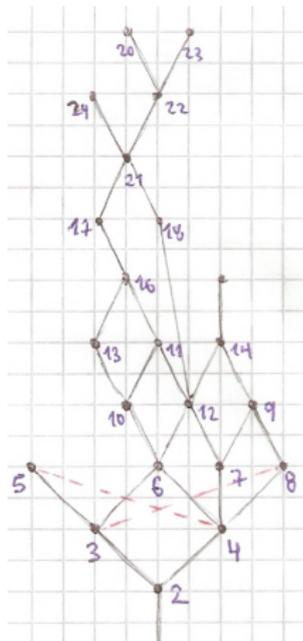


Mapa:

- ENORME
- Alta dimensión.

Control remoto:

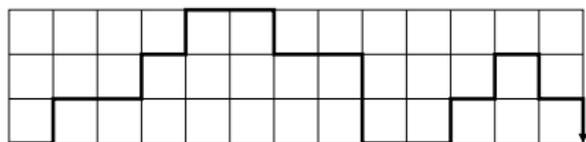
- Grande
- Complicadito...



## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

EJEMPLO 2. El brazo robótico en cualquier túnel rectangular.

(FA, Cesar Ceballos, Hanner Bastidas, John Guo, 2016)



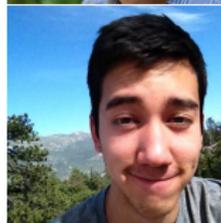
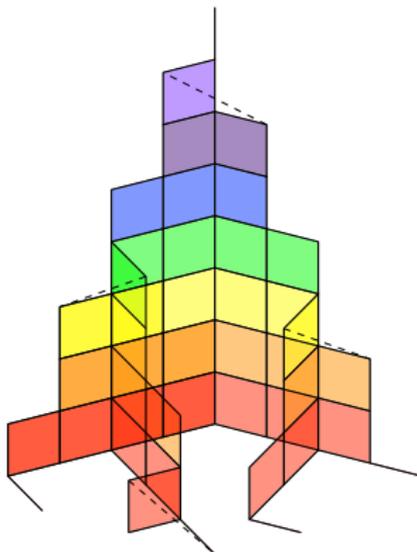
Mapa:

- ENORME
- Alta dimensión

Control remoto:

El "CORAL"

- Grande
- Complicadito
- Tres dimensiones

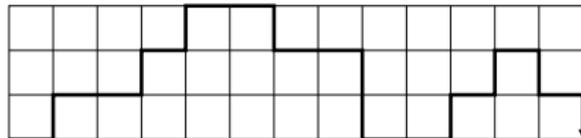




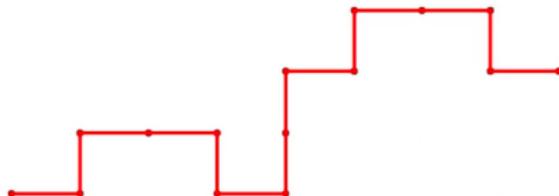
## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

EJEMPLO 2. El brazo robótico en cualquier túnel rectangular.

(FA, Cesar Ceballos, Hanner Bastidas, John Guo, 2016)



```
Enter the number of rows in the grid (grid height): 5
Enter a valid state: ruruurddruururd
Enter a valid state: rruurdrrrdruruu
The minimum number of steps is 26 .
The minimum number of individual moves is 67.
```

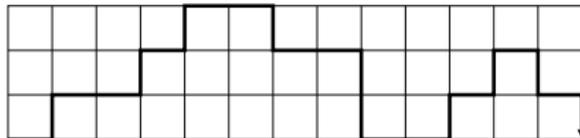


VEAMOS UN VIDEO.

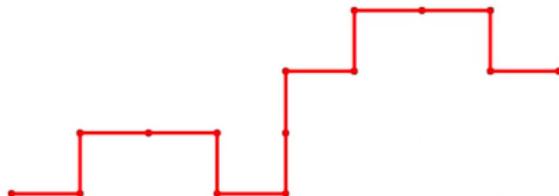
## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

EJEMPLO 2. El brazo robótico en cualquier túnel rectangular.

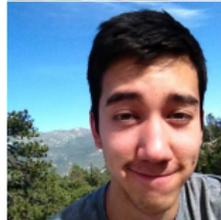
(FA, Cesar Ceballos, Hanner Bastidas, John Guo, 2016)



```
Enter the number of rows in the grid (grid height): 5
Enter a valid state: ruruurddruururd
Enter a valid state: rruurdrrrdruruu
The minimum number of steps is 26 .
The minimum number of individual moves is 67.
```



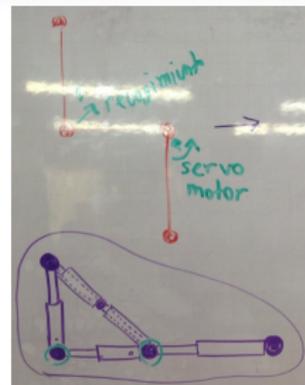
VEAMOS UN VIDEO.



## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

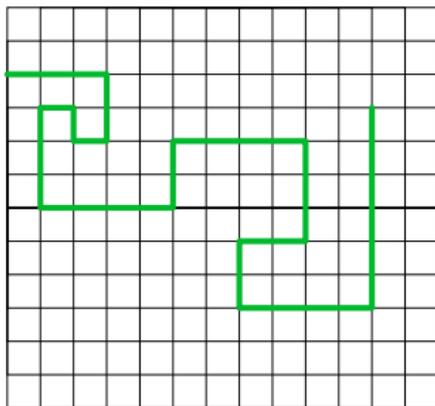
### Clubes de Ciencia Colombia (Ayer)

Cesar Ceballos (U. Viena), Olga Salazar (U. Nal. Medellín)  
Arlys Asprilla, Cristian Lopez, Daniel Betancur,  
Diego Penagos, Dubenis López, Felipe Hoyos,  
Juan C. Cuervo, Juan E. Zabala, Juan M. Patiño,  
Manuel Ramos, María F. Gualero, Santiago Martínez,  
Sebastián Ramírez, Sebastián Sánchez, Wolsey Rubio.



## 5. Y ENTONCES, ¿CÓMO MOVEMOS EL ROBOT?

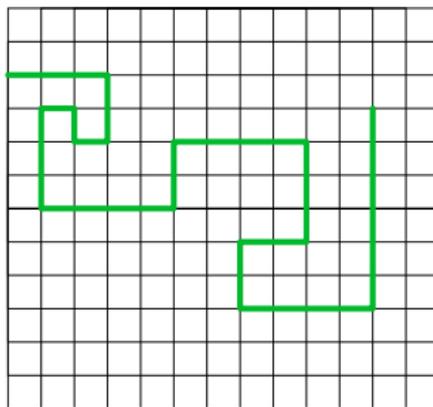
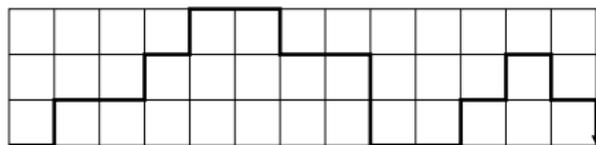
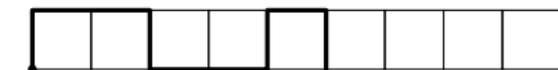
EJEMPLO 3. La culebra robótica.



- Este “mundo robótico” **NO** es negativo.
- **No sabemos** cómo mover este robot eficientemente.
- ¿Ustedes saben?

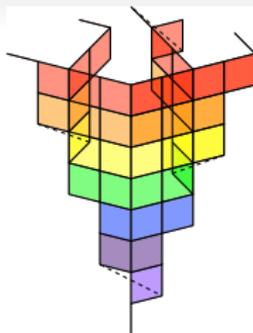
# CÓMO USAMOS LA FORMA PARA CONOCER EL MUNDO?

En resumen:



- Para mover un robot usamos el mapa de su **mundo robótico**.
- Si su **mundo robótico** es **negativo** o **plano**, podemos mover ese robot eficientemente.
- Si su **mundo robótico** es **positivo**, no sabemos cómo moverlo.

**Para poder conocer y navegar el mundo (robótico), necesitamos conocer y usar su forma.**



muchas gracias

Los artículos y transparencias están en:

Advances in Applied Mathematics **48** (2012) 142-163.

SIAM J. Discrete Math. **28-2** (2014), pp. 986-1007

<http://arxiv.org/abs/1101.2428>

<http://arxiv.org/abs/1211.1442>

<http://math.sfsu.edu/federico>