④. Calculando funciones de Möbius

Sean $P, Q$ posets con funciones de Möbius $\mu_P$ y $\mu_Q$, respectivamente

(a) Veamos que $\mu_{P\times Q}(p,q) = \mu_P(p)\cdot\mu_Q(q)$.

D/: Primero veamos que dados $x_1 \leq_P y_1$, $x_2 \leq_Q y_2$ se tiene que $[(x_1,x_2),(y_1,y_2)]_{P\times Q} = [x_1,y_1]_P \times [x_2,y_2]_Q$. Pero esto es claro porque

$$(x_1,x_2) \leq (z_1,z_2) \leq (y_1,y_2) \iff \begin{array}{l} x_1 \leq z_1 \leq y_1 \\ x_2 \leq z_2 \leq y_2 \end{array}$$

Ahora, queremos que $\mu_P\cdot\mu_Q$ sea una función de Möbius, y por lo sería la función de Möbius sobre $P\times Q$

- $\mu((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = \mu_P(x_1,x_1)\,\mu_Q(x_2,x_2) = 1\cdot 1 = 1$.
- Sea $(x_1,x_2) < (y_1,y_2)$, entonces

$$\sum_{(x_1,x_2)\leq(z_1,z_2)\leq(y_1,y_2)} \mu((x_1,x_2),(z_1,z_2)) = \sum_{\substack{z_i\in[x_i,y_i] \\ i=1,2}} \mu_P(x_1,z_1)\,\mu_Q(x_2,z_2)$$

$$= \prod_{i=1,2} \delta_{x_i,y_i} = 0 \qquad \left(\text{pues } \sum_{x\leq z\leq y} \mu(z,y) = \delta_{x,y}\right)$$

Y esto es justamente lo que queríamos mostrar, pues una función de Möbius debe satisfacer que $\mu(x,x)=1$ y $\mu(x,y) = -\sum_{x\leq z<y} \mu(x,z)$; pero esta última condición es equivalente a $\sum_{x\leq z\leq y} \mu(x,z) = 0$, que es justamente lo que hemos demostrado. Así, $\mu_P\cdot\mu_Q$ es la función de Möbius de $P\times Q$

Este resultado puede ser generalizado para un conjunto $\{P_i\}_{i=1}^n$ de posets, razonando de la forma hecha arriba.

(b) Veamos que la función de Möbius de $2^{[n]}$ es

$\mu(A,B) = (-1)^{|B|-|A|}$ para $A \subseteq B \subseteq [n]$

D/: Procedamos por inducción sobre $k = |B| - |A|$. Sea $\zeta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

- $k = 0$:

$A \subseteq B$ y $|A| = |B|$. Luego, $A = B$. Entonces

$$\mu(A,A) = \mu(A,A)\zeta(A,A) = \sum_{A \leq C \leq A} \mu(C,A) = \delta_{A,A} = 1$$

- Supongamoslo válido para $k-1$ y veámoslo para $k$.

Sea $|B| - |A| = k$. Entonces $\sum_{A \leq C \leq B} \mu(A,C) = 0$, luego

$\mu(A,B) = -\sum_{A \leq C < B}$. Ahora, supongamos que $B = A \cup \{b_1, \dots, b_k\}$

entonces dado $c$ tal que $A \leq C \leq B$ tenemos que $C$ queda completamente determinado por los $b_i$ contenidos en $C$.

Luego, para todo $1 \leq i \leq k$ tenemos que hay justamente $\binom{k}{i}$ subconjuntos de la forma de $C$ (contenidos en $B$ los cuales contienen a ciertos $b_{r_1}, \dots, b_{r_i}$.

Además, por hipótesis de inducción tenemos que

$\mu(A,C) = (-1)^i$ para todos los $C$ descritos arriba.

En particular, $\mu(A,B) = -\sum_{A \leq C < B} \mu(A,C) = -\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i}(-1)^i$

$= -(1-1)^k + (-1)^k = (-1)^k = (-1)^{|B|-|A|}$

Así, $\mu(A,B) = (-1)^{|B|-|A|}$ si $A \subseteq B$.

c) Consideremos $D_n$ con el orden: $k \leq m$ sii $k | m$.

Supongamos $k \leq m \leq n$. Sea $\mu$ la función de möbius clásica.

$\mu(m) = (-1)^r$
$\mu(k) = (-1)^s$ $\Rightarrow$ $r = s+a$ para algún $a \geq 0$. Luego,

$$\frac{m}{k} = \frac{p_{i_1} \cdots p_{i_r}}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$$ con $p_{i_x} \neq p_{i_y}$ si $x \neq y$. Los $p_j$'s son algunos de los $p_i$'s

$$= p_{l_1} \cdots p_{l_{r-s}}$$

$$\Rightarrow \mu\left(\frac{m}{k}\right) = (-1)^{r-s} = (-1)^a = (-1)^{2s}(-1)^a$$

$$= (-1)^s \cdot (-1)^{s+a}$$

$$= \mu(k) \cdot \mu(m).$$

Luego, si $k \leq m$ entonces $\tilde{\mu}(k,m) = \mu(k) \cdot \mu(m)$.

Si $k \nleq m$ entonces hacemos $\tilde{\mu}(k,m) = 0$.

(d). Consideremos el retículo de particiones $\Pi_n$

Tenemos que el polinomio característico de $\Pi_n$ es

$q\chi_{\Pi_n}(q) = q(q-1)(q-2)\cdots(q-n+1)$ (*)

pues de la tarea 4 sabemos que $\Pi_n \cong M(K_n)$.

Por otra parte,

$$q\chi_{\Pi_n}(q) = q\sum_{\pi \in \Pi_n} \mu(\pi) q^{r-r(\pi)} = q\sum_{\pi \in \Pi_n} \mu(\pi) q^{n-1-(n-|\pi|)} = \sum_{\pi \in \Pi_n} \mu(\pi) q^{|\pi|}$$

donde $\mu$ es la función de Möbius de $\Pi_n$ y $|\pi|$ es el número de bloques de $\pi$.

Ahora, de (*) tenemos que la derivada de $q\chi(q)$ en $q=0$

es $[q'\chi(q) + q\chi'(q)]_{q=0} = \chi(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

De (**) tenemos que $[q'\chi(q) + q\chi'(q)]_{q=0} = \mu(\hat{1})$

Luego, $\mu(\hat{1}) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

Ahora, usando la parte a) del ejercicio vemos que si $\pi$ tiene como bloques $B_1, B_2, \ldots, B_k$ entonces

$$\mu(\pi) = \prod_{i=1}^{k} (-1)^{|B_i|-1}(|B_i|-1)! = (-1)^{n-k}\prod_{i=1}^{k}(|B_i|-1)!$$