2. Sea p un número primo y $\mathbb{F}_p$ el campo de p elementos. Sea L_p la matroide vectorial de los siguientes $2(p+1)$ vectores en $\mathbb{F}_p^{p+1}$:

$$V_p = \{(1,0,\ldots,0,0)\ (0,1,\ldots,0,0),\ \ldots,\ (0,0,\ldots,1,0),\ (0,0,\ldots,0,1),$$
$$(0,1,\ldots,1,1),\ (1,0,\ldots,1,1),\ \ldots,\ (1,1,\ldots,0,1),\ (1,1,\ldots,1,0)\}$$

Notación: $u_i = (0,0,\ldots,1,0,\ldots,0)$ ↳ posición i $\qquad v_i = (1,1,\ldots,0,1,\ldots,1)$ ↳ posición i

a) Para demostrar estos dos ejercicios primero demostraremos que si L_p se puede representar en un campo $\mathbb{F}$ $\Rightarrow$ la característica de $\mathbb{F}$ es p.
(Esto nos daría que L_p se puede representar en $\mathbb{F}$ si la característica de $\mathbb{F}$ es p)

Primero quiero identificar ciertos circuitos y bases para poder ver como debería tener la independencia/dependencia en $\mathbb{F}$.

1) $\{u_1,\ldots,u_{p+1}\} \in \mathcal{B}$

2) $\{u_i, v_i, u_j, v_j\} \in \mathcal{C}$: pues $\quad v_i - v_j = (0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (posición i; posición j)

$$\Rightarrow v_i - v_j + u_i - u_j = 0$$

- $\{u_i, v_i, u_j\} \in \mathcal{I}$ pues si $a u_i + b v_i + c u_j = 0$
$\Rightarrow$ como en la posición i solo sumo $a1 = a \Rightarrow a = 0$
$\Rightarrow b v_i + c u_j \overset{*}{=} 0$ como en las posiciones diferentes a j, i solo sumo $b1 = b \Rightarrow b = 0$
$\Rightarrow c u_j = 0 \Rightarrow c = 0$

- $\{u_i, v_i, v_j\} \in \mathcal{I}$ pues si $a u_i + b v_i + c v_j = 0$
como en la posición j solo sumo $b1 = b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a u_i + c v_j = 0$
y similar a $*$ $a, c = 0$

3) $\{v_i, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{p+1}\} \in \mathcal{C}$: es claro que $v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p+1} u_j$

- $\{u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_{p+1}\} \in \mathcal{I}$ ✓

- $\{v_i, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_{p+1}\} \in \mathcal{I}$: suponga que $a v_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{p+1} a_k u_k = 0$ entonces en la posición k solo sumo a
$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{p+1} a_k u_k = 0$ y como cualquier subconjunto de $\{u_1,\ldots,u_{p+1}\} \in \mathcal{B}$
$\Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k \neq i,j$

4) $\{v_1, \dots, v_{p+1}\} \in \mathcal{C}$: $v_1 + \dots + v_{p+1} = (p, \dots, p) = (0, \dots, 0) = 0$

• $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{p+1}\} \in \mathcal{I}$: si $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} a_j v_j = 0$

$\Rightarrow$ por la posición i $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} a_j = 0$

pero entonces $a_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k}}^{p+1} a_j$

además por la posición k $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i,k}}^{p+1} a_j = 0 \Rightarrow a_k = 0$

puedo seguir mirando cada posición $k \neq i$ y llegaré a que $a_k = 0$ $\forall k \neq i \Rightarrow$ son independientes.

ahora supongamos que L_p se puede representar en $\mathbb{F}$, un campo.

Como $\{u_1, \dots, u_{p+1}\} \in \mathcal{B} \Rightarrow$ puedo mirar en el caso que $V_p \subseteq \mathbb{F}^{p+1}$

Además puedo suponer $u_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ↳ posición i

Como los conjuntos de la forma 2 son un circuito entonces $v_i = a u_i + b u_j + c v_j$ con $a, b, c \neq 0$ $\in \mathbb{F}$; como puedo reemplazar vectores (Notación $v_i \rightsquigarrow v_j$) por vectores paralelos a este $\Rightarrow$ puedo suponer $c = 1 \Rightarrow v_i = a u_i + b u_j + v_j$. Si fijo a v_i y hago este proceso con cada v_j $(j \neq i)$ comparando e igualando entradas llegaré a que $\Rightarrow$ para las posiciones $k \neq i, j$ $v_i = v_j$.

$v_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_{p+1})$ y entonces

Como los conjuntos de la forma 3 son un circuito $\Rightarrow$ $v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} c_j u_j$ en la posición i tendré que esta es cero en $v_i \Rightarrow b_i = 0$

$\Rightarrow v_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_{p+1})$. además cada uno de los $a_i \neq 0$ pues de lo contrario si algún $a_i = 0 \Rightarrow \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_{p+1}\} \notin \mathcal{I}$ pues $(v_1 + \dots + v_{i-1}) - (v_{i+1} + \dots + v_{p+1}) = 0$ contrario a los circuitos como 4.

Además por estos circuitos $\sum_{i=1}^{p+1} c_i v_i = 0$. $(c_i \neq 0\ \forall i)$ Si miro el valor de la posición j tengo entonces que $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p+1} c_i a_j = 0$ $\forall j \Rightarrow a_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p+1} c_i = 0$

como $a_j \neq 0 \Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p+1} c_i = 0$

$\Rightarrow c_j = \sum_{i=1}^{p+1} c_i \quad \forall j \Rightarrow c_i = c_j \ \forall i,j$. Sea $c_i = c \Rightarrow$

$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{p+1} c_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{p+1} c = \underbrace{c + \cdots + c}_{p\text{-veces}} = p \cdot c = 0$ (Notación) como $c_i \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$

pero la característica

$\Rightarrow$ si d es la característica de $\mathbb{F} \Rightarrow d \mid p$ $u_i = 0 \Rightarrow u_i \notin I$

de $\mathbb{F}$ no puede ser 1 pues $1 = 0$ y

$\Rightarrow d = p \Rightarrow$ la característica de $\mathbb{F}$ es p.

a) Como L_p es representable en $\mathbb{F}$ sii la característica de $\mathbb{F}$ es $p \Rightarrow \mathbb{F}$ no puede tener característica 0

b) Si L_p fuera un menor de $L_q \Rightarrow$ como las matroides lineales son cerradas bajo menores entonces la independencia de L_p como menor de L_q sería la misma independencia en L_q como matroide lineal $\Rightarrow L_p$ se podría representar en $\mathbb{F}_q \Rightarrow$ la característica de $\mathbb{F}_q$ sería $p \Rightarrow \Leftarrow$ pues $p < q$

K_n :