Cesar Ceballos

(5) Sea $M=(E,\mathcal{B})$ un matroide y $w: E \to \mathbb{R}^+$ una funcion de peso en E. Para cada numero real r, sea $E_r = \{e \in E \,;\, w(e) \le r\}$. Note que hay solamente un numero finito de conjuntos diferentes E_r; llamemos a estos conjuntos $S_1, \dots, S_K$. y $w_1 < w_2 < \dots < w_K$ los diferentes valores que alcanza W en E.

<u>Afirmacion</u>: Si M_w es el matroide de Bases de minimo peso de M, entonces $M_w = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_K$, donde $M_i = \underbrace{M \setminus (E - S_i)}_{\text{restriccion de } M \text{ sobre } S_i} / S_{i-1}$. Note que el ground set de M_i es $W^{-1}(w_i)$

<u>Dem//</u> Recuerde que para formar las bases de minimo peso comenzamos tomando eltos independientes del menor peso posible hasta formar una base B_w. Sean $I_i = B_w \cap W^{-1}(w_i)$,

TODA BASE DE MINIMO PESO ES BASE DE $M_1 \oplus \dots \oplus M_K$

i) $\begin{cases} \text{mostraremos que } I_i \text{ es base en } M_i \text{ y por lo tanto} \\ B_w = I_1 \oplus \dots \oplus I_K \text{ es base en } M_1 \oplus \dots \oplus M_K. \end{cases}$

Note que $I_1 \oplus \dots \oplus I_i \subseteq S_i$ y $I_1 \oplus \dots \oplus I_i$ es indep en S_i (ya que $B_w = I_1 \oplus \dots \oplus I_K$ indep en M), luego $I_1 \oplus \dots \oplus I_i$ es indep. en $M \setminus (E - S_i)$ (restriccion de M a S_i), mas aun $I_1 \oplus \dots \oplus I_i$ es una base de $M \setminus (E - S_i)$ debido a la manera en que se forman las bases de minimo peso (no se pueden agregar mas elementos a $I_1 \oplus \dots \oplus I_i$ de peso $\le w_i$ de manera de que sigan siendo independientes).

Ahora para ver que I_i es base en $M_i = M \setminus (E - S_i) / S_{i-1}$ tenemos que mostrar que $B \cup I_i$ es una base de $M \setminus (E - S_i)$ para alguna base B de S_{i-1}. Escogiendo $B = I_1 \oplus \dots \oplus I_{i-1}$ obtenemos el resultado ∎

ii-) $\begin{cases} \text{Mostraremos que si } I_1 \oplus \cdots \oplus I_K \text{ es base de } M_1 \oplus \cdots \oplus M_K \\ \text{entonces es base de } M_w. \end{cases}$

Primero note que los eltos en M_i pesan w_i y por lo tanto todas las bases de $M_1 \oplus \cdots \oplus M_K$ tienen el mismo peso ya que son de la forma $B_1 \oplus \cdots \oplus B_K$ donde B_i es base de M_i. Mas aun, estos son base de minimo peso de M.

<u>Dem/</u> Ya mostramos que las bases de minimo peso son bases de $M_1 \oplus \cdots \oplus M_K$ y como todas las bases de $M_1 \oplus \cdots \oplus M_K$ tienen el mismo peso, basta con demostrar que toda base de $M_1 \oplus \cdots \oplus M_K$ es base de M.

Sea $I_1 \oplus \cdots \oplus I_K$ una base de $M_1 \oplus \cdots \oplus M_K \Rightarrow I_j$ es base de M_j

probemos que $I_1 \oplus \cdots \oplus I_j$ es base en M restringido a S_j, es decir, base en $M \setminus (E - S_j)$

$j = 1 \Rightarrow I_1$ base en $M_1 = M \setminus (E - S_1)$

$j < K \Rightarrow j+1$

supongamos $I_1 \oplus \cdots \oplus I_j$ base en $M \setminus (E - S_j)$.

Como I_{j+1} es base de $M_{j+1} = M \setminus (E - S_{j+1}) / S_j$, entonces $B \cup I_{j+1}$ es base de $M \setminus (E - S_{j+1})$ para cualquier base B de S_j. Tomando $B = I_1 \oplus \cdots \oplus I_j$ (hipotesis de induc)

$\Rightarrow I_1 \oplus \cdots \oplus I_j \oplus I_{j+1}$ es base de $M \setminus (E - S_{j+1})$

$\therefore I_1 \oplus \cdots \oplus I_K$ es base de $M \setminus (E \setminus S_K) = M \setminus \emptyset = M$ ∎

En resume, hemos mostrado que las bases de M_w y de $M_1 \oplus \cdots \oplus M_K$ son exatamente las mismas y por lo tanto

$$M_w = M_1 \oplus \cdots \oplus M_K$$