Santiago Saavedra Pineda (Trabajé con Andrés Uribe)

4. Sean: $A = \{a_1, \dots, a_m \mid a_i$ vértice de M t.q. $\exists\, a_i \to e$ (arista que los une)$\}$
$B = \{b_1, \dots, b_n \mid b_i$ vértice de M t.q. $\exists\, e \to b_i\}$
$C = \{c_1, \dots, c_p \mid c_i$ vértice de M t.q. $\exists\, c_i \to f\}$
$D = \{d_1, \dots, d_q \mid d_i$ vértice de M t.q. $\exists\, f \to d_i\}$

Construya a partir de M el siguiente matroide cotransversal M^2: "Fusione" los vértices e y f, es decir "elimine" el vértice e y las aristas que salen y llegan a él y dibuje las aristas $a_i \to f$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ y $f \to b_i$ $\forall i \{1, \dots, n\}$. Deje $B_0^M = B_0^{M^2}$ (si se tiene $e \in B_0^M$ ahora se tendrá $B_0^{M^2} \ni f$ y $B_0^M \setminus e = B_0^{M^2} \setminus f$.

Nunca pasará $e // f$ y $e, f \in B_0^M$ porque en particular $B_0^M \in \mathcal{B}^M$ $\Rightarrow \{e, f\} \in \mathcal{I}_M \Rightarrow\Leftarrow$ con el hecho que sean paralelos.

Voy a probar $M \setminus e \cong M^2$ (y por tanto es cotransversal) mirando que las bases en ambos matroides son las mismas

$\mathcal{B}^{M\setminus e} \subseteq \mathcal{B}^{M^2}$:

Sea $X \in \mathcal{B}^{M\setminus e} \Rightarrow e \notin X \wedge \exists$ un routing en M de X a B_0^M

Hay varias opciones: ($PR(X, Y, M)$ = conjunto de vértices en M en algún path del routing de X a Y en M

I. $e \notin PR(X, B_0^M, M)$:

Como en M^2 están exactamente los mismos vértices y aristas $\Rightarrow X \in \mathcal{B}^{M^2}$ (con el mismo routing

II. $e \in PR(X, B_0^M, M) \wedge f \notin PR(X, B_0^M, M)$:

Nótese que el routing en M^2 de X a B_0^M será el mismo sino que ahora pasa por f en vez de e (pues f adoptó todas las conexiones de e)

III. $e, f \in PR(X, B_0^M, M)$:

Nótese primero que e y f deben estar en el mismo path. Porque si no, podría "recortar" cada path para que empezaran en e y f respectivamente y tendría $\{e, f\} \in \mathcal{I}_M \Rightarrow\Leftarrow$

Como e y f están en el mismo path, me "olvido" de lo que esté entre

ellos, y tengo un path en M^2 que sale del mismo vértice que en M (a menos que fuese e y ahora es f) como el conjunto de paths no se intersectaba ahora tampoco (son menos y de los mismos vértices) y como llegaban a $\mathcal{B}_0^m$ llegan a $\mathcal{B}_0^{m^2}$ (es lo mismo salvo lo dicho si $e \in \mathcal{B}_0^M$)
Como en los tres casos (que son exhaustivos) se tiene $\Rightarrow \mathcal{B}_0^m \subseteq \mathcal{B}_0^{m^2}$ q.e.d

$\underline{\mathcal{B}^{m^2} \subseteq \mathcal{B}^{m \setminus e}}$

Sea $X \in \mathcal{B}^{m^2} \Rightarrow e \notin X \wedge \exists$ routing de X a $\mathcal{B}_0^{m^2}$. Nuevamente hagamos casos.

I. Si $f \notin PR(X, \mathcal{B}_0^{m^2}, M^2)$:
Por lo tanto en M está exactamente el mismo camino $\Rightarrow X \in \mathcal{B}^M$ y como $e \notin X \Rightarrow X \in \mathcal{B}^{M \setminus e}$

II Si $f \in PR(X, \mathcal{B}_0^{m^2}, M^2)$: Tengo 4 subcasos

① f está en el path con aristas que tenían f originalmente en M:
es decir en el path están $c_i \to f \to d_j$ algunos i, j (si se necesitan)
Por lo tanto en M se tiene el mismo routing y como $e \notin X \Rightarrow X \in \mathcal{B}^{M \setminus e}$

② f está en el path con aristas que tenían e originalmente en M:
es decir en el path están $a_i \to f \to b_j$ algunos i, j (si se necesitan)
- Si $\exists\, a_i \Rightarrow$ nótese que el routing es el mismo en M sino que pasa por e, pero igualmente $a_i \neq e \Rightarrow X \in \mathcal{B}^M \Rightarrow X \in \mathcal{B}^{M \setminus e}$
- Si $\nexists\, a_i$ (es decir el path arranca en f y se va por una de las aristas de e) se ve que $X - f \cup e$ es una base en M, pero como $e // f$ $\Rightarrow X - f \cup f = X \in \mathcal{B}^M$ y como $e \notin X \Rightarrow X \in \mathcal{B}^{M \setminus e}$

③ En el path están $a_i \to f \to d_j$ (digamos ese path arranca en v y termina en b_0)
Si $\nexists\, a_i$ es el caso ①. Si $\exists\, a_i$, vemos que $X - v \cup f \in \mathcal{B}^{m^2}$ y no usa las aristas que tienen a e $\Rightarrow X - v \cup f \in \mathcal{B}^M$ como $e // f$ $\Rightarrow X - v \cup e \in \mathcal{B}^M$ y si le añado $v \to \dots \to a_i \to e$ al path de e tengo que $X \in \mathcal{B}^M$ y como $e \notin X \Rightarrow X \in \mathcal{B}^{M \setminus e}$

④ En el path están $c_i \to f \to b_j$ (ese path arranca en v y termina en b_0).
Si $\nexists\, c_i$ es el caso ②. Si $\exists\, c_i$, vemos que $X - v \cup f \in \mathcal{B}^{m^2}$

y como solo usa "aristas de e" y no de $f \Rightarrow X - v \cup e \in \mathcal{B}^{M}$
pero como $e // f \Rightarrow X - v \cup f \in \mathcal{B}^{M}$ y si le añado $v \to \ldots \to c_i \to f$
se ve que $X \in \mathcal{B}^{M}$ y como $e \notin X \Rightarrow X \in \mathcal{B}^{M \setminus e}$.
Como lo tengo en todos los casos $\Rightarrow \mathcal{B}^{M_2} \subseteq \mathcal{B}^{M \setminus e}$
por lo tanto $\mathcal{B}^{M_2} = \mathcal{B}^{M \setminus e}$ y como tenemos el mismo ground set, vemos que los matroides son isomorfos
$\Rightarrow M \setminus e$ es cotransversal.