3. Un Sistema de Axiomas "locales" para funciones de rango.

Demuestre que una función $r: 2^E \longrightarrow \mathbb{N}$ es la función rango de una matroide en E sii r cumple lo siguiente:

(R1)' $r(\emptyset) = 0$

(R2)' Si $A \subseteq E$ y $a \in E \Rightarrow r(A \cup a) - r(A) = 0$ ó 1

(R3)' Si $A \subseteq E$ y $(a, b \in E$ cumplen que $r(A \cup a) = r(A \cup b) = r(A)) \Rightarrow (r(A \cup a \cup b) = r(A$

Dem: "$\Rightarrow$" Sea $r: 2^E \to \mathbb{N}$ la función rango de una matroide en E

(R1)' $0 \leq r(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0 \Rightarrow r(\emptyset) = 0$

(R2)' Sean $A \subseteq E$ y $a \in E$. Suponga que $r(A \cup a) - r(A) > 1$.

Sea B_1 base de $A \cup a$ y B_2 base de A ($B_1 \subseteq A \cup a$ ind max., $B_2 \subseteq A$ ind max)

$\Rightarrow |B_1| - |B_2| > 1 \Rightarrow |B_1| > 1 + |B_2|$. Como $B_1 \subseteq A \cup a \Rightarrow B_1 - a \subseteq A$

Si $a \notin B_1 \Rightarrow B_1 \subseteq A$ y B_1 es independiente y $|B_1| > |B_2| \Rightarrow B_2$ no es maximal $\Rightarrow \Leftarrow$

Si $a \in B_1 \Rightarrow B_1 - a \subseteq A$ y como $B_1 - a \subseteq \underset{\text{ind}}{B_1} \Rightarrow B_1 - a$ es independiente

y $|B_1 - a| = |B_1| - 1 > 1 + |B_2| - 1 = |B_2| \Rightarrow |B_1 - a| > |B_2| \Rightarrow B_2$ no es maximal $\Rightarrow \Leftarrow$

$\Rightarrow |B_1| - |B_2| \leq 1 \Rightarrow r(A \cup a) - r(A) \leq 1$

y como $A \subseteq A \cup a \Rightarrow$ por (R3) $r(A) \leq r(A \cup a) \Rightarrow 0 \leq r(A \cup a) - r(A)$ $\Rightarrow$

(R3)' Sean $A \subseteq E$ y $a, b \in E$ tales que $r(A \cup a) = r(A \cup b) = r(A)$

Como $A \cup a \cup b \supseteq A \Rightarrow r(A) \leq r(A \cup a \cup b)$ por (R3) falta entonces ver que $r(A \cup a \cup b) \leq r(A)$.

Sean $X = A \cup a$, $Y = A \cup b \Rightarrow X \cup Y = A \cup a \cup b$, $X \cap Y = A$ ó $A \cup b$ (si $a = b \notin A$)

pero $r(A) = r(A \cup b) = r(X \cap Y)$

$\Rightarrow r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ por (R3)

$\Rightarrow r(A \cup a \cup b) + r(A) \leq r(A \cup a) + r(A \cup b)$; $r(A \cup a) = r(A \cup b) = r(A)$

$\Rightarrow r(A \cup a \cup b) + \cancel{r(A)} \leq r(A) + \cancel{r(A)}$

$\Rightarrow r(A \cup a \cup b) \leq r(A) \Rightarrow r(A \cup a \cup b) = r(A)$

"$\Leftarrow$" Quiero ver que si $r: 2^E \to \mathbb{N}$ cumple (R1)' ~ (R3)' $\Rightarrow$ r cumple (R1) ~ (R3) lo cual llevaría a que r es una función rango de una matroide E

(R1) $0 \leq r(X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq E$

Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

$$\begin{array}{lcl} r(\emptyset \cup x_1) - r(\emptyset) = r(x_1) = 0,1 & & r(x_1) = 0,1 \\ r(x_1 \cup x_2) - r(x_1) = 0,1 & & r(x_1 \cup x_2) = 0,1,2 \\ r(x_1 \cup x_2 \cup x_3) - r(x_1 \cup x_2) = 0,1 & \Rightarrow & r(x_1 \cup x_2 \cup x_3) = 0,1,2,3 \\ \vdots & & \vdots \\ r(X) - r(x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_{n-1}) = 0,1 & & r(X) = 0,1,2,\dots,n \end{array}$$

$\Rightarrow \quad 0 \leq r(X) \leq n = |X|$

(R2) Sea $X \subseteq Y \subseteq E$. Sea $Y - X = \{a_1, \dots, a_n\}$

☆ Como $r(X \cup a) - r(X) = 0$ ó 1 $\Rightarrow$ $r(X \cup a) \geq r(X)$ por (R2)' $\forall X \subseteq E, a \in E$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & r(X \cup a_1) \geq r(X) \\ & r(X \cup a_1 \cup a_2) \geq r(X \cup a_1) \\ & \vdots \\ & r(Y) \geq r(X \cup a_1 \cup \dots \cup a_{n-1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad r(Y) \geq r(X \cup a_1 \cup \dots \cup a_{n-1}) \geq \dots \geq r(X \cup a_1 \cup a_2) \geq r(X \cup a_1) \geq r(X)$

$\Rightarrow r(Y) \geq r(X)$ ∎

(R3) Sean $X, Y \subseteq E$

Lema: Si $A \subseteq B$ y $r(A \cup a) = r(A) \Rightarrow r(B \cup a) = r(B)$

Dem: Inducción en $|B| - |A| = n$

1) Caso base: sea $|B| - |A| = 1 \Rightarrow B = A \cup b$ sea $a \in E$ tal que $r(A \cup a) = r(A)$

$r(A \cup b) - r(A) = 0$ ó 1

a) Si $r(A \cup b) = r(A) \Rightarrow r(A \cup b) = r(A) = r(A \cup a)$

$\Rightarrow$ por (R3)' $r(A \cup a \cup b) = r(A) \Rightarrow r(B \cup a) = r(B)$

b) Si $r(A \cup b) = r(A) + 1 \Rightarrow r(A \cup b) = r(A \cup a) + 1$

$r(A \cup a \cup b) - r(A \cup a) = 0$ ó 1

b1) si $r(A \cup a \cup b) = r(A \cup a)$

$\Rightarrow r(A \cup b) = r(A \cup a) + 1 = r(A \cup a \cup b) + 1$

$\Rightarrow r(A \cup b) > r(A \cup a \cup b)$ lo cual no es posible pues $A \cup b \subseteq A \cup a \cup b$ y ya demostramos (R2)

b2) Si $r(A \cup a \cup b) = r(A \cup a) + 1$

$\Rightarrow r(A \cup b) = r(A \cup a) + 1 = r(A \cup a \cup b)$

2) Caso inductivo: Sea $|B| - |A| = n$ sea $b \in B - A \Rightarrow |B - b| - |A| = |B| - 1 - |A| = n - 1$

$\Rightarrow$ Si $r(A \cup a) = r(A) \Rightarrow r((B - b) \cup a) = r(B - b)$ por hipótesis de inducción.

$B - b \subseteq B$ y $|B| - |B - b| = |B| - |B| + 1 = 1$ y

$r((B - b) \cup a) = r(B - b) \Rightarrow$ por el caso base

$r(B \cup a) = r(B)$ $\lrcorner$

Sea $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$

$r(X \cap Y) + r(X) \leq r(X \cap Y) + r(X)$

Quiero ver si $r(X \cap Y) + r(X \cup y_1) \leq r(X \cap Y \cup y_1) + r(X)$

Pero esto se cumple si cuando crece lo de la izquierda, crece lo de la derecha y si cuando no crece lo de la derecha, no crece lo de la izquierda.

Por el lema como $X \cap Y \subseteq X \Rightarrow$ si $r(X \cap Y \cup y_1) = r(X \cap Y) \Rightarrow$

$r(X \cup y_1) = r(X)$ y si $r(X \cup y_1) = r(X) + 1 \Rightarrow r(X \cap Y \cup y_1) = r(X \cap Y) + 1$

(la negación del lema).

$\Rightarrow$ Si crece lo de la izquierda, i.e., $r(X \cup y_1) = r(X) + 1 \Rightarrow r(X \cap Y \cup y_1) = r(X \cap Y) + 1$

$\Rightarrow r(X \cap Y) + r(X \cup y_1) = r(X \cap Y) + r(X) + 1 \leq r(X \cap Y) + 1 + r(X)$

$= r(X \cap Y \cup y_1) + r(X)$

$\Rightarrow$ crece lo de la derecha

Si no crece lo de la derecha, i.e., $r(X\cap Y \cup y_1) = r(X\cap Y) \Rightarrow r(X\cup y_1) = r(X)$

$$\Rightarrow \quad r(X\cap Y) + r(X\cup y_1) = r(X\cap Y) + r(X) \leq r(X\cap Y) + r(X) = r((X\cap Y)\cup y_1) + r(X)$$

En cualquier caso $r(X\cap Y) + r(X\cup y_1) \leq r((X\cap Y)\cup y_1) + r(X)$

Ahora quiero ver que $r(X\cap Y) + r(X\cup y_1\cup y_2) \leq r((X\cap Y)\cup y_1\cup y_2) + r(X)$

similarmente $(X\cap Y)\cup y_1\cup y_2 \subseteq X\cup y_1\cup y_2$

si $r(X\cup y_1\cup y_2) = r(X\cup y_1) + 1 \Rightarrow r((X\cap Y)\cup y_1\cup y_2) = r((X\cap Y)\cup y_1) + 1$

$$\Rightarrow \quad r(X\cap Y) + r(X\cup y_1\cup y_2) = r(X\cap Y) + r(X\cup y_1) + 1 \leq r((X\cap Y)\cup y_1) + 1 + r(X)$$
$$= r((X\cap Y)\cup y_1\cup y_2) + r(X)$$

si $r((X\cap Y)\cup y_1\cup y_2) = r((X\cap Y)\cup y_1) \Rightarrow r(X\cup y_1\cup y_2) = r(X\cup y_1)$

$$\Rightarrow \quad r(X\cap Y) + r(X\cup y_1\cup y_2) = r((X\cap Y)\cup y_1\cup y_2) + r(X)$$

y en cualquier caso $r(X\cap Y) + r(X\cup y_1\cup y_2) = r((X\cap Y)\cup y_1\cup y_2) + r(X)$

Siguiendo este proceso hasta y_n como $X\cup y_1\cup\cdots\cup y_n = X\cup Y$ y $(X\cap Y)\cup y_1\cup\cdots\cup y_n =$

llegamos entonces a que $r(X\cap Y) + r(X\cup Y) \leq r(Y) + r(X)$ ∎