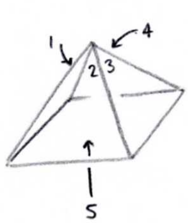
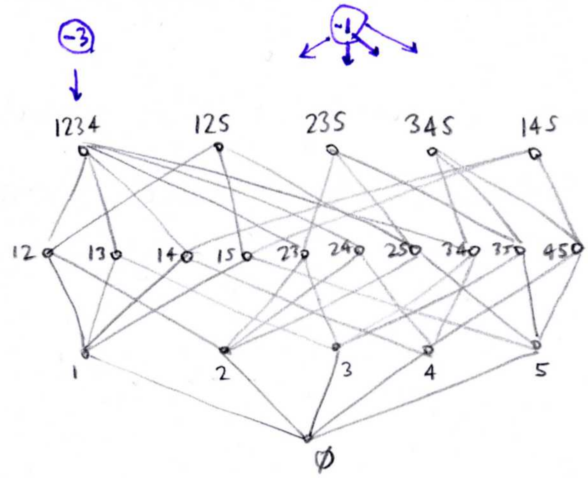
Möbius numbers: (*)

① 



← 1

← -1

← 1

$$\boxed{\begin{array}{c}\chi(q)=q^3-5q^2+10q-7\\ \downarrow \\ |\chi(-1)|=23 \text{ regiones}\end{array}}$$

② Usando el método de campos finitos, tenemos que contar los puntos $(x_1,\to x_n)\in\mathbb{F}_q^n$ (q grande) con $x_i\neq 0,\ x_i\neq x_j,\ x_i\neq -x_j$. Escogiendo en orden, $x_{k+1}\neq \underbrace{0,x_1,-x_1,x_2,-x_2,\dots,x_k,-x_k}_{2k+1 \text{ números}}$

$$(\underset{\substack{\uparrow\\ q-1\\ \text{opciones}}}{x_1},\ \underset{\substack{\uparrow\\ q-3\\ \text{ops.}}}{x_2},\ \underset{\substack{\uparrow\\ q-5\\ \text{ops.}}}{x_3},\ \dots,\ \underset{\substack{\uparrow\\ q-(2n-1)\\ \text{ops.}}}{x_n})$$

$$\boxed{\chi_{B_n}(q)=(q-1)(q-3)(q-5)\dots(q-(2n-1))}$$

③ Como $T_M(x,y)=\sum_{A\subseteq E}(x-1)^{r-r(A)}(y-1)^{|A|-r(A)}$. Miremos cada sumando.

- Si $M\cong U_{m,n}$: Si $|A|\leq m \to r(A)=|A| \to (x-1)^{m-|A|}$
  Si $|A|>m\to r(A)=m \to (y-1)^{|A|-m}$
  → no hay términos mixtos

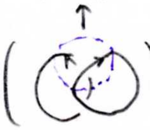
- Si $M\ncong U_{m,n}$: Existe A dependiente con $|A|\leq r \Rightarrow r-r(A)\geq 1,\ |A|-r(A)\geq 1$
  Entonces $\sum_{A\subseteq E}(x-1)^{r-r(A)}(y-1)^{|A|-r(A)}$ contiene términos mixtos,
  Y un término mixto $(x-1)^a(y-1)^b$ con (a,b) maximal da un monomio x^ay^b que no se cancela en $T_M(x,y)$.

④ $\frac{1}{t}V\Big($  $\Big) - t\,V\Big($  $\Big) = \left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)V\Big($  $\Big)$

↑ "no-nudo" en clase

↑ ?

no nudo

$\frac{1}{t}V\Big($  $\Big) - t\,V\Big($  $\Big) = \left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)V\Big($  $\Big)$

↑ $-(\sqrt{t}+1/\sqrt{t})$

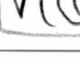
↑ 1

$\frac{1}{t}V\Big($  $\Big)=$

$$t+\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left[t\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}-t\sqrt{t}-\sqrt{t}\right)\right]$$

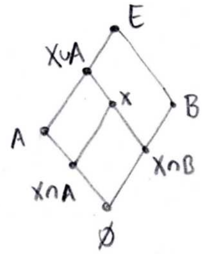
$$=t+(t^{1/2}-t^{-1/2})(-t^{1/2}-t^{5/2})$$

$$=t-t+1-t^3+t^2$$

$V\Big($  $\Big)=t+t^3-t^4$

⑤ (a) $\Rightarrow$: $M=(M|A)\oplus(M|B) \Rightarrow r(M)=r(M|A)+r(M|B)=r(A)+r(B)$

$\Leftarrow$: Quiero: $r_M(X)=r_{M|A}(X\cap A)+r_{M|B}(X\cap B)$ para todo $X\subseteq E$



Por submodularidad (dos veces)

$$\underset{①}{r(E)-r(B)}\le \underset{②}{r(X\cup A)-r(X\cap B)}\le \underset{③}{r(A)-r(\emptyset)}$$

Pero ①=③ por hipótesis $\Rightarrow$ ②=③

Por submodularidad (dos veces)

$$\underset{④}{r(X\cup A)-r(A)}\le \underset{⑤}{r(X)-r(X\cap A)}\le \underset{⑥}{r(X\cap B)-r(\emptyset)}$$

Pero ②=③ implica ④=⑥ $\Rightarrow$ ⑤=⑥ como queríamos.

(b) M conexa $\Leftrightarrow$ existen A,B con $A\cup B=E$, $A\cap B=\emptyset$, $r(A)+r(B)=r(M)$

$\Leftrightarrow$ " $(r(M)-r(A))+(r(M)-r(B))=r(M)$

$\Leftrightarrow$ " $(|A|-r^*(A))+(|B|-r^*(B))=r(M)$

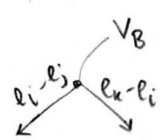
$\Leftrightarrow$ " $r^*(A)+r^*(B)=|E|-r(M)=r(M^*)$

$\Leftrightarrow M^*$ conexa.

⑥ (a) Cada lado es e_i-e_j, y $\|e_i-e_j\|=\sqrt{\langle e_i-e_j,e_i-e_j\rangle}=\sqrt{2}$

(b) $a=e_i-e_j$ $b=e_k-e_l$ $\Rightarrow$ $\underbrace{a\cdot b}_{0,\pm1,\text{ ó }\pm2}=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\theta=2\cos\theta \Rightarrow \theta=0°, 60°, 90°, 120°$ ó $180°$.

(c) El ángulo entre dos lados consecutivos no puede ser $120°$ porque sería:



- según el vector de la izquierda $i\notin B$
- según el vector de la derecha $i\in B$

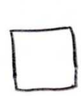
$0°$

(Tampoco $180°$ por lo mismo)

Los únicos polígonos con lados de longitud $\sqrt{2}$ y ángulos de $60°$ o $90°$ son:

↑

$U_{1,3}$



↑

$U_{1,2}\oplus U_{1,2}$