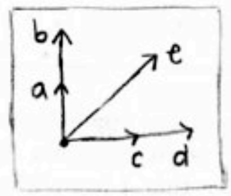
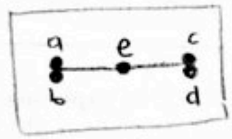
1. $E=\{a,b,c,d,e\}$ $\qquad \mathcal{C}=\{ab,cd,ace,ade,bce,bde\}$

(a)

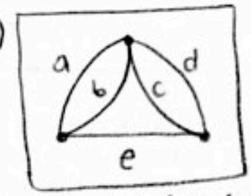


representación lineal



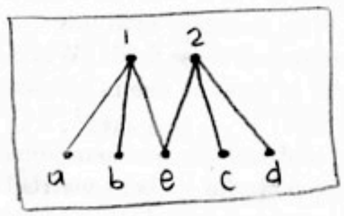
representación afín

(b)



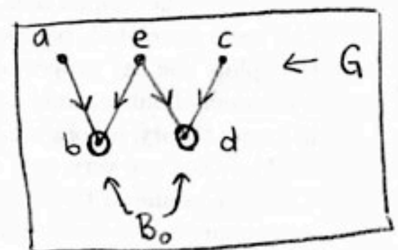
representación gráfica

(c)



representación transversal

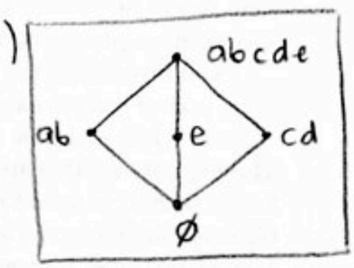
(d)



representación cotransversal

(e) $\boxed{\mathcal{B}=\{ac,ad,ae,bc,bd,be,ce,de\}}$

(f)



2. $\subseteq$: $\quad A\subseteq B \overset{(CL2)}{\Longrightarrow} \mathrm{cl}\,A\subseteq \mathrm{cl}\,B$ ■

$\supseteq$: $\quad$ Sea $b\in \mathrm{cl}\,B \longrightarrow r(B\cup b)=r(B)=r(A)$

Ahora, $B\cup b\supseteq A\cup b\supseteq A \longrightarrow r(B\cup b)\geq r(A\cup b)\geq r(A)$

iguales

$\longrightarrow r(A\cup b)=r(A)$

$\longrightarrow b\in \mathrm{cl}\,A$ ■

3. (a) S genera a $M \iff S \supseteq B$ para alguna base B de M

$\iff E-S \subseteq E-B$ para alguna base $E-B$ de M^*

$\iff E-S$ es independiente en M^* ∎

(b) $E-S$ y $E-T$ son independientes en M^* y $|E-S|<|E-T|$

Por (I3), existe $s \in ((E-T)-(E-S)) = S-T$ tal que

$(E-S)\cup s$ es independiente en $M^* \rightarrow S-s$ genera a M. ∎

4. C, D dependientes $\Rightarrow r(C) \leq |C|-1 \quad r(D) \leq |D|-1$

$C \cap D$ independiente $\Rightarrow r(C\cap D) = |C \cap D|$

Por submodularidad, $r(C\cup D) \leq r(C)+r(D)-r(C\cap D)$

$\leq |C|-1+|D|-1-|C\cap D| = |C\cup D|-2,$

de donde $r(C\cup D - x) \leq r(C\cup D) \leq |C\cup D|-2 < |C\cup D - x|$. ∎

5. (a) Sea B una base de $M/A \Rightarrow$ Si B_A es una base de A, $B\cup B_A$ es independiente en $M \Rightarrow B$ es independiente en M y $B\cap A = \emptyset \Rightarrow$ B es independiente en $M\backslash A \Rightarrow r(M/A) = |B| \leq r(M\backslash A)$.

(b) ① $\mathcal{B}(M/A) \subseteq \mathcal{B}(M\backslash A)$: Sea B una base de M/A. Repitiendo el argumento de (a), B es indep. en $M\backslash A$ y $|B| = M\backslash A \rightarrow B \in \mathcal{B}(M\backslash A)$.

② $r(M^*/A) = r(M^*\backslash A)$:

$r(M^*/A) = r((M\backslash A)^*) = |E-A| - r(M\backslash A) = |E-A| - r(M/A) = r((M/A)^*) = r(M^*\backslash A)$

③ $\mathcal{B}(M/A) \supseteq \mathcal{B}(M\backslash A)$:

Por ② podemos usar ① con M^* y A, y obtener que

$\mathcal{B}(M^*/A) \subseteq \mathcal{B}(M^*\backslash A) \xrightarrow[\text{dual}]{} \mathcal{B}(M\backslash A) \subseteq \mathcal{B}(M/A)$. ∎