teoría de matroides

federico ardila

universidad de los andes
(san francisco state university)

segundo parcial

Tiempo: 2 horas.

Justifique todas sus respuestas.
Puede usar sus apuntes de clase y tareas. No puede usar el libro.
El examen es sobre 100 puntos. Sí, ya sé que suman 105...

1. (15 puntos) Considere una pirámide regular con base cuadrada; sus cinco caras de dimensión 2 determinan un arreglo de cinco (hiper)planos en $\mathbb{R}^3$. Encuentre el poset de intersecciones, el polinomio característico y el número de regiones de este arreglo.

2. (15 puntos) Sea $\mathcal{B}_n$ el siguiente arreglo de hiperplanos en $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} x_i &= 0 \qquad (1 \leq i \leq n), \\ x_i - x_j &= 0 \qquad (1 \leq i < j \leq n), \\ x_i + x_j &= 0 \qquad (1 \leq i < j \leq n). \end{aligned}$$

   Calcule el polinomio característico de $\mathcal{B}_n$.

3. (15 puntos) Demuestre que una matroide M es uniforme (es decir, $M \cong U_{m,n}$ para algunos enteros $1 \leq m \leq n$) si y sólo si su polinomio de Tutte $T_M(x, y)$ no contiene ningún monomio de la forma $x^i y^j$ con $i, j \geq 1$.

4. (15 puntos) Calcule el polinomio de Jones del nudo de la figura:

5. (25 puntos)

   (a) Sea $M = (E, r)$ una matroide y sean $A, B \subseteq E$ tales que $A \cup B = E$ y $A \cap B = \emptyset$. Demuestre que $M = (M|A) \oplus (M|B)$ si y sólo si $r(M) = r(A) + r(B)$.

   (b) Demuestre que M^* es conexa si y sólo si M es conexa.

6. (20 puntos)

   (a) Demuestre que todos los lados de un politopo matroidal tienen longitud $\sqrt{2}$.

   (b) Demuestre que el ángulo que forman dos lados cualesquiera de un politopo matroidal es igual a $0°, 60°, 90°, 120°$ o $180°$.
   (Pista. Calcule de dos formas distintas el producto punto entre los vectores determinados por los dos lados.)

   (c) Describa todos los polígonos (de dimensión 2) que son politopos matroidales.

mucha suerte,

.f.