teoría de matroides

federico ardila

universidad de los andes
(san francisco state university)

primer parcial

Justifique todas sus respuestas, pero vea la nota del problema 1.
Puede usar sus apuntes de clase.
El examen es sobre 100 puntos.
Sí, ya sé que suman 110...

1. (30 puntos) Sea $M = (E, \mathcal{C})$ la matroide sobre el conjunto $E = \{a, b, c, d, e\}$ cuya colección de circuitos es $\mathcal{C} = \{ab, cd, ace, ade, bce, bde\}$.
   (a) Demuestre que M es una matroide lineal.
   (b) Demostrar que M es una matroide gráfica.
   (c) Demostrar que M es una matroide transversal.
   (d) Demostrar que M es una matroide cotransversal.
   (e) Encontrar las bases de M.
   (f) Dibujar el retículo de conjuntos cerrados (*flats*) de M.

   Nota. En las partes (a)-(d), es suficiente mostrar una representación correcta de M como matroide lineal/gráfica/transversal/cotransversal. No es necesario justificar por qué su construcción es correcta. Del mismo modo, en las partes (e) y (f) no es necesario justificar su respuesta.

2. (15 puntos) Sea $M = (E, r)$ una matroide. Si $A \subseteq B \subseteq E$ y $r(A) = r(B)$, demostrar que $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(B)$.

3. (20 puntos)
   (a) Demostrar que S es un conjunto generador de la matroide M si y sólo si $E - S$ es independiente en la matroide dual M^*.
   (b) Sean S y T conjuntos generadores tales que $|S| > |T|$. Demostrar que existe $s \in S - T$ tal que $S - s$ es un conjunto generador.

4. (20 puntos) Sean C y D conjuntos dependientes en una matroide tales que $C \cap D$ es independiente. Demostrar que $C \cup D - x$ es dependiente para todo x.

5. (25 puntos) Sea $M = (E, r)$ una matroide y $A \subseteq E$.
   (a) Demostrar que $r(M/A) \leq r(M \backslash A)$; es decir, el rango de la contracción de A en M es mayor o igual que el rango de la eliminación de A en M.
   (b) Si $r(M/A) = r(M \backslash A)$, demostrar que $M/A = M \backslash A$.

mucha suerte,

.f.