Andrea Rincón 200520528.

Problema 8

1) Para $I_2(\infty)$ Basta probar $l(ws_i) > l(w) \Rightarrow w\alpha_i > 0$.

Ahora ya que $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -\cos\left(\frac{\pi}{\infty}\right) = -1$

$\Rightarrow$

$$s_1(\alpha_1) = -\alpha_1$$
$$s_1(\alpha_2) = \alpha_2 + 2\alpha_1$$
$$s_2(\alpha_2) = -\alpha_2$$
$$s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + 2\alpha_2$$

Ahora se va a ver que $l(ws_2) > l(w) \Rightarrow w\alpha_2 > 0$, si $l(ws_2) > l(w) \Rightarrow$ la expresion de w termina en s_1 (existe una sola expresion ya que $(ab)^k \neq e \ \forall k \in \mathbb{N}^+$)

ahora las palabras en $I_2(\infty)$ que terminan en s_1 son de la forma $w = s_2 s_1 \cdots s_2 s_1$, $w = s_1$ ó $w = s_1 s_2 s_1 \cdots s_2 s_1$ es claro que para el primer caso $l(w)$ es par y para el segundo $l(w)$ es impar ahora por indución se puede ver

$w\alpha_2 = (k+1)\alpha_2 + k\alpha_1$ donde $k = l(w)$ y k es par

y $w\alpha_1 = (k+1)\alpha_1 + k\alpha_2$ donde $k = l(w)$ y k es impar

Dem: (Para $W=e$ es claro).

Caso base $l(W)=1 \Rightarrow W=s_1$

$$s_1(\alpha_2) = \alpha_2 + 2\alpha_1 \Rightarrow 1\alpha_2 + (1+1)\alpha_1$$

ahora asuma que es verdad para $l(W)<k$

para W con $l(W)=k$ se tiene

i) Si k es par

$$W = s_2 s_1 s_2 s_1 \cdots s_2 s_1$$

$$s_2 W = s_1 s_2 s_1 \cdots s_2 s_1$$

y $l(s_2 W) = l(s_1 s_2 s_1 \cdots s_2 s_1) = k-1$ que es impar

de h. de inducción se tiene

$$\begin{aligned} W(\alpha_2) = s_2 s_2 W(\alpha_2) &= s_2(s_1 s_2 s_1 \cdots s_2 s_1(\alpha)) \\ &= s_2((k-1)\alpha_2 + k(\alpha_1)) \\ &= -(k-1)\alpha_2 + k(\alpha_1 + 2\alpha_2) \\ &= -k\alpha_2 - \alpha_2 + k\alpha_1 + 2k\alpha_2 \\ &= (k+1)\alpha_2 + k\alpha_1 \end{aligned}$$

ii) Si K es impar:

$$W = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 \cdots s_2 s_1$$

$$s_1 W = s_2 s_1 s_2 s_1 \cdots s_2 s_1 \quad \text{con}$$

$K-1 = \ell(s_1 W) < \ell(W)$. de hipotesis di inducción que es par

se tiene

$$s_1 W(\alpha_2) = (K-1)\alpha_1 + K\alpha_2$$

$$y \quad s_1 s_1 W(\alpha_2) = W(\alpha_2) = -(K-1)\alpha_1 + K(\alpha_2 + 2\alpha_1)$$

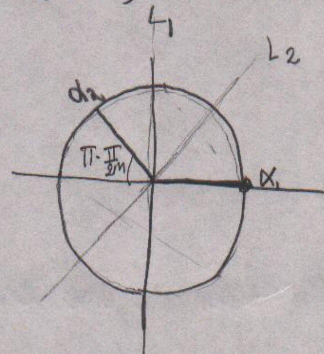
$$= -K\alpha_1 + \alpha_1 + K\alpha_2 + 2K\alpha_1 = (K+1)\alpha_1 + K\alpha_2$$

así se tiene $\ell(W s_2) > \ell(W) \Rightarrow W\alpha_2 > 0$

ahora con el proceso analogo para s_1 se tiene $\ell(W s_1) > \ell(W) \Rightarrow W\alpha_1 > 0$

2. Para $I_2(2m)$. tome la representación:

(Se va a ver $l(ws_i)<l(w) \Rightarrow w\alpha_i<0$)



Donde L_i es la recta perpendicular a α_i, ahora s_1 es la reflexion sobre la recta L_1, s_2 es la reflexión sobre sobre la recta L_2.

Ahora los elementos de $I_2(2m)$ son de la forma $s_1s_2s_1s_2\cdots$ y $s_2s_1s_2s_1\cdots$

ademas ya que s_1s_2 y s_2s_1 son rotaciones se tiene que las palabras de la forma

$(s_1s_2)^k$ y $(s_2s_1)^k$ son rotaciones y

las de la forma $s_2(s_1s_2)^k$ y $s_1(s_2s_1)^k$ son reflexiones.

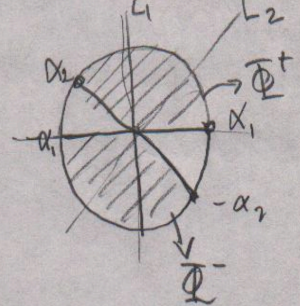
Ahora ya que $(s_1s_2)^{2m}=e$ se tiene

i) $w=(s_1s_2)^m=(s_2s_1)^m$ es w_0 ya que s_1w y $s_2w<w$.

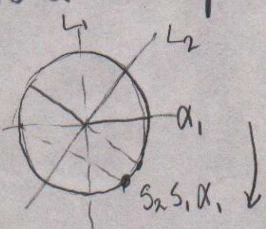
ii) El angulo en el que rotan s_1s_2 y s_2s_1 es de $\frac{\pi}{m}$ ya $(s_1s_2)^{2m}(\alpha)=\alpha \Rightarrow 2m\theta=2\pi \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{m}$

iii) Una forma reducida para una rotacion es de la forma $(s_1s_2)^k$ y $(s_2s_1)^k$ con $k<m$

Ahora es claro que los elementos de Φ^- se encuentran en la parte inferior del circulo y los elementos de Φ^+ en la superior

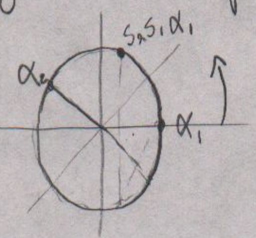


Ahora si aplicamos $s_2 s_1$ a α_1 se tiene



con lo cual es claro que $s_2 s_1$ es una rotacion de $-\frac{\pi}{m}$

y si se aplica $s_1 s_2$ a α_1 se tiene



con lo cual es claro que es una rotación de $\frac{\pi}{m}$

Ahora ya que la forma reducida de una rotación es $(s_2 s_1)^k$ y $(s_1 s_2)^k$ con $k < m$ y el angulo de rotación $\theta = k\frac{\pi}{m} < \frac{m\pi}{m} = \pi$

es claro que

$$(s_2 s_1)^k(\alpha_1) < 0 \quad y \quad (s_1 s_2)(\alpha_2)^k < 0$$

ya que que estas rotaciones van en la parte baja del circulo para α_1 y α_2, y nunca iran mas alla de $-\alpha_1$ y $-\alpha_2$ respectivamente

y ya que una reflexión en su forma reducida es de la forma

$$s_1(s_2 s_1)^k \quad o \quad s_2(s_1 s_2)^k$$

$$s_1(s_2 s_1)^k(\alpha_1) < 0 \quad y \quad s_2(s_1 s_2)^k(\alpha_2) < 0$$

que que $(s_2 s_1)^k(\alpha_1)$ envian a α_1 a una raiz negativa y s_1 solo afecta la componente de α_1 y las raices son positivas o negativas, lo mismo para $s_2(s_1 s_2)^k(\alpha_2)$