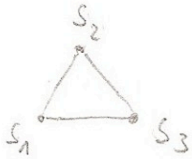
#6

Coxeter Group $\tilde{A}_2$ con Coxeter Diagram:



$$\Longrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea V $\mathbb{R}$-Espacio Vectorial con base $\{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle \alpha_i; \alpha_i \rangle \longrightarrow 1$$
$$\langle \alpha_i; \alpha_j \rangle \longrightarrow -1/2$$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

$$W \longmapsto GL(V)$$
$$s_i \longmapsto \sigma_i \qquad \text{con} \quad \sigma_i(v) = v - 2\langle v; \alpha_i \rangle \alpha_i$$

"Reflexión" sobre el "hiperplano" "ortogonal" a α_i

[redacted]

i) El "hiperplano" "ortogonal" a α_1 esta compuesto por todos los $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ t.q.

$$\langle v; \alpha_1 \rangle = \lambda_1 \langle \alpha_1; \alpha_1 \rangle + \lambda_2 \langle \alpha_2; \alpha_1 \rangle + \lambda_3 \langle \alpha_3; \alpha_1 \rangle$$
$$= \lambda_1 - \tfrac{1}{2}\lambda_2 - \tfrac{1}{2}\lambda_3 = 0$$

i.e. por todos los $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ t.q. $\lambda_1 = \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3$

$\Longrightarrow$ el "hiperplano" "ortogonal" a α_1 esta generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Análogamente ~~ellos~~ los "hiperplanos" "ortogonales" a α_2 y α_3 respectivamente son los generados por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ii) "Reflejar" sobre estos planos es aplicar σ_i

Si $v = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}$

$$\sigma_1(v) = v - 2\left[\lambda_1\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle + \lambda_2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle + \lambda_3\langle\alpha_1,\alpha_3\rangle\right]\alpha_1$$

$$= \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 - 2\left[\lambda_1 - \tfrac{1}{2}\lambda_2 - \tfrac{1}{2}\lambda_3\right]\alpha_1$$

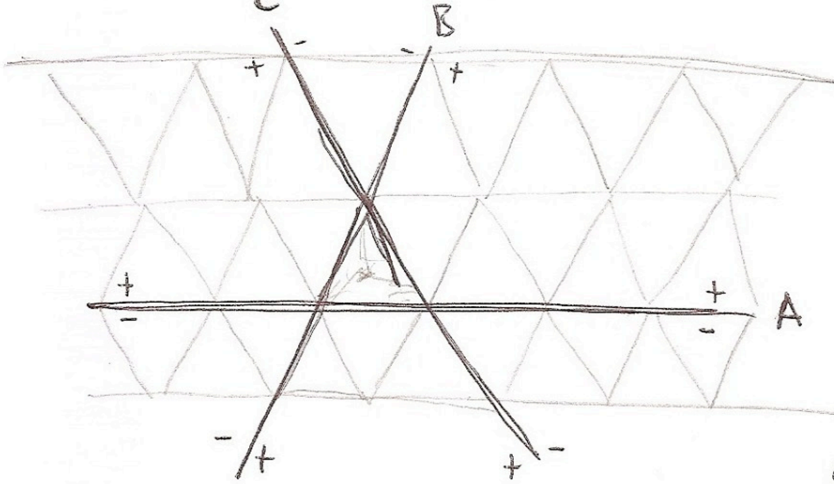
$$= (-\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 1\cdot\lambda_3)\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$$

$$\Rightarrow \sigma_1(v) = (-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 = \begin{pmatrix}-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}$$

Análogamente

$$\sigma_2\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ -\lambda_2+\lambda_1+\lambda_3\\ \lambda_3\end{pmatrix} \quad y \quad \sigma_3\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ -\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1\end{pmatrix}$$

iii) Retomemos la interpretación de $\tilde{A}_2$ como simetrías orientadas de una grilla triangular infinita



Estas simetrías están generadas por las reflexiones alrededor de los ejes A, B y C cada una de las cuales puede ser descrita algebraicamente por $A(x;y;z) = (-x;\ x+y;\ x+z)$

$B(x;y;z) = (x+y;\ -y;\ y+z)$ y $C(x;y;z) = (x+z;\ y+z;\ -z)$

siendo $(x;y;z)$ las coordenadas trilineales de un punto de la grilla, definidas por su "distancia" hasta el respectivo eje y el signo asociado

* Ver: COXETER, GREITZER : Geometry Revisited p. [illegible]

iv) <u>Relación</u>

Sabemos que $\tilde{A}_2 \cong$ Symetrías Orientadas Grilla triangular

y que $\tilde{A}_2 \cong G \leq GL(V)$ donde $G = \langle \rho_1; \rho_2; \rho_3 \rangle$

Como la relación $\cong$ es transitiva sabemos que

$$\text{Symetrías Orientadas Grilla Triangular} \cong G$$

en el sentido en el que podemos asociar a cada simetría orientada de la grilla triangular un elemento de G

tomando $w \in SOGT \longrightarrow w = \text{Combinación}\{A; B; C\}$

$\longrightarrow \text{Combinación}\{\rho_1; \rho_2; \rho_3\} \longrightarrow g = G \leq GL(V)$