1). Sea S_n el grupo simétrico y w_0 su elemento maximal.

a) Muestre que $s_1s_2s_1s_3s_2s_1 \ldots s_{n-1}s_{n-2}\cdots s_2s_1$ es una palabra reducida para w_0

b) Cuál es el mínimo número de generadores que pueden removerse de ésta palabra para obtener la identidad?

Solución:

a) Por Inducción en n,

Caso Base: $n=2$.

Tengo que verificar que en S_2, la palabra $s_1 = w_0$.
Pero esto lo sabemos porque s_1 es el único elemento de S_2 entonces $s_1 = w_0$.

Paso Inductivo: Supóngalo cierto para $n<k$ y muéstrelo para $n=k$.

Quiero ver que $s_1s_2s_1s_3s_2s_1\ldots s_{k-1}\ldots s_1$ es una expresión reducida de w_0 en S_k. Ahora, si $J=\{s_1,\ldots,s_{k-2}\} \Rightarrow$ $s_1s_2\ldots s_{k-1} \in W^J$, esto es cierto puesto que $s_1s_2\ldots s_{k-1}$ es una palabra reducida ya que la única forma de reducirla es por las relaciones: $(s_i)^2=e$ ó $(s_is_j)^2=e$ para $j\neq i+1$ y $(s_is_{i+1})^3=e$. pero para $s_1s_2\ldots s_{k-1}$ nada conmuta y cada generador ocurre una sola vez por lo tanto esta es irreducible y es además es la única expresión reducida de ella.
Por lo tanto como $s_1\ldots s_{k-1}$ no termina en ningún elemento de J para toda expresión reducida de $s_1\ldots s_{k-1}$ entonces $s_1\ldots s_{k-1} \in W^J$.
Ahora, $s_1\ldots s_{k-2}s_1\ldots s_{n-3}\ldots s_1s_2s_3s_1s_2s_1 \in W_J$.

entonces si $w = s_1\cdots s_{k-1}s_1\cdots s_{k-2}\cdots s_1s_2s_1$ donde $s_1\ldots s_{k-1} \in W^J$ y $s_1\ldots s_{k-2}\ldots s_1s_2s_1 \in W_J$ y por hipótesis de inducción $s_1s_2s_1\ldots s_{k-2}\ldots s_1$ es una expresión reducida para w_0 en S_{k-1} por lo tanto $w_0^{-1} = s_1\ldots s_{k-2}\ldots s_1s_2s_1$ también es reducida. De aquí, $\ell(s_1\cdots s_{k-1}) = k-1$ y $\ell(s_1\cdots s_{k-2}\cdots s_1s_2s_1) = \frac{(k-2)(k-1)}{2}$ y como $s_1\ldots s_{k-1} \in W^J$ y $s_1\cdots s_{k-2}\cdots s_1s_2s_1 \in W_J$ es una factorización de w, sabemos que $\ell(w) = \ell(w^J)+\ell(w_J) \Rightarrow s_1\ldots s_{k-1}s_1\ldots s_{k-2}\ldots s_1s_2s_1$ es reducida. Por lo tanto $s_1s_2s_1\ldots s_{k-2}\ldots s_1s_{k-1}\ldots s_1$ también debe ser reducida y como $\ell(s_1s_2s_1\cdots s_{k-2}\cdots s_1s_{k-1}\cdots s_1) = \frac{(k-1)(k)}{2} = \binom{k}{2}$ que es la longitud de w_0 en S_k entonces $w_0 = s_1s_2s_1\ldots s_{k-1}\ldots s_1$ en S_k.

b). En S_n, sabemos que $w_0 = n\, n{-}1 \ldots 1$. Queremos encontrar el mínimo número de generadores que podemos quitarle a $s_1s_2s_1\ldots s_{n-1}\ldots s_1$ para obtener la identidad. Sabemos que quitar generadores es equivalente a multiplicar por trasposiciones.

Ahora, como $w_0 = n\, n{-}1\ldots 1$ y si suponemos n par, sabemos que ninguno de los elementos $1,\ldots,n$ quedan fijos en w_0.
Por lo tanto si de w_0 queremos llegar a e y como ningun elemento queda fijo si estamos en w_0 debemos multiplicar a w_0 por por lo menos $\left(\frac{n}{2}\right)$ transposiciones $\tau_1,\ldots,\tau_{n/2}$ ya que esto asegura que ningún elemento de w_0 se queda fijo después de aplicar las $\frac{n}{2}$ transposiciones. Por lo tanto el mínimo que buscábamos no puede ser menor que $\left(\frac{n}{2}\right)$, sin embargo, para $w_0 = n\,n{-}1\cdots 1$ si multiplicamos por las trasposiciones $(n,1)(n{-}1,2)\cdots(n/2, n/2+1)$ obtenemos e y éstas son $\left(\frac{n}{2}\right)$, entonces el mínimo debe ser $\left(\frac{n}{2}\right)$.

Ahora, cuando n es impar, $w_0 = n\ n{-}1 \cdots 1$ donde $\frac{n+1}{2}$ se queda fijo. Entonces para obtener la identidad necesitamos por lo menos mover $n-1$ números de su posición y esto no lo podemos hacer con menos de $\frac{n-1}{2}$ trasposiciones. Además las trasposiciones $(1,n)(2,n-1)\cdots(n-1/2, n+3/2)$ que son $\frac{n-1}{2}$ trasposiciones reducen a w_0 en e. Por lo tanto el mínimo debe ser $\frac{n-1}{2}$ para n impar.