5. Para probar este hecho hagamos inducción sobre $\ell(u)-\ell(v)$. Para $w_0 < w_1$ notemos

$$E[w_0, w_1] = \{x \in [w_0, w_1] : \ell(x) \text{ es par}\}$$
$$O[w_0, w_1] = \{x \in [w_0, w_1] : \ell(x) \text{ es impar}\}$$

Si $\ell(v)-\ell(u) = 1$, entonces $[u, v] = \{u, v\}$ y ya que $\ell(u) = \ell(v)+1$, claramente en $[u, v]$ la cantidad de elementos de rango par es igual a la cantidad de elementos de rango impar. Supongamos la afirmación válida cuando $\ell(v)-\ell(u) < k+1$. Si $\ell(v)-\ell(u) = k+1$, sea $v = s_1 s_2 \cdots s_n$ una expresión irreducible para v. Existen $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n$ t.q $u = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_m}$.

Si $j_1 = 1$ por hipótesis de inducción en $[s_1 u, s_1 v]$ hay tantos elementos de rango par como elementos de rango impar. La propiedad de la subpalabra permite afirmar que

$$E[u, v] = s_1 O[s_1 u, s_1 v] \sqcup E[s_1 u, s_1 v]$$
$$O[u, v] = s_1 E[s_1 u, s_1 v] \sqcup O[s_1 u, s_1 v]$$

Es claro que ni la cardinalidad de $O[s_1 u, s_1 v]$ ni la de $E[s_1 u, s_1 v]$ se altera por multiplicación a izquierda por s_1 justamente por la propiedad de la subpalabra. Si $j_1 > 1$ por hipótesis de inducción en $[u, s_1 v]$ hay tantos elementos de rango par como elementos de rango impar. La propiedad de la subpalabra permite afirmar que

$$E[u, v] = s_1 O[u, s_1 v] \sqcup E[u, s_1 v]$$
$$O[u, v] = s_1 E[u, s_1 v] \sqcup O[u, s_1 v]$$

En cualquier caso $|E[u, v]| = |O[u, v]|$.