(a) Pruebe que $A \subseteq T$ genera S_n si y solo si A conecta todos los vertices de K_n.

Supongamos que A conecta todos los vertices de K_n. Entonces para cualesquiera $i < j$, existe un camino desde i hasta j que pasa consecutivamente por los puntos $i = m_1, m_2, ..., m_k = j$ sin repeticiones (es decir $m_l \neq m_s$ si $l \neq s$). Sea $Z_s = (m_s, m_{s+1})$ para $1 \leq s \leq k-1$, claramente $Z_s \in A$ y $(i,j) = Z_1 Z_2 ... Z_{K-1} ... Z_2 Z_1$. Por lo tanto, A genera todas las transposiciones de la forma (i,j), y asi genera cualquier permutación de S_n.

Ahora, note que la imagen de i bajo cualquier permutación generada por A, es un elemento en la parte conexa de i; esto se debe a que cada elemento de A transpone a dos elementos de la parte conexa de i, o deja constantes a todos los elementos de la parte conexa de i. Por lo tanto, si A no conectara todos los puntos de K_n, la imagen de i bajo cualquier permuatación generada por A no alcanzaria todos los elementos de [n], por lo cual, A no generaría todo S_n.

(b) pruebe que $A \subseteq T$ es un sistema de generadores de coxeter para S_n si y solo si A es un camino conectando todos los vertices de k_n.

Supongamos que A es un camino conectando todos los verticas de k_n, llamemos $z_1, ..., z_{n-1}$ a las aristas de este camino de manera consecutiva; claramente los z_i satisfacen las relaciones de los s_i del problema 5. y entonces A genera un grupo de coxeter isomorfo a S_n.

Ahora supongamos que A no es un camino conectando todos los vertices. Si no conecta todos los vertices, por la parte *a.* no generaría todo S_n, y si A conecta todos los vertices pero no es un camino, tendría que haber un circuito o un punto que tenga tres aristas adyacentes como se ilustra en la figura 1. En el caso en que haya algun

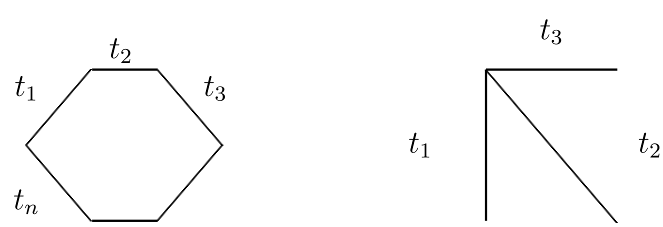

Figura 1: circuito y punto con tres lados adyacentes

circuto, $t_n = t_1 ... t_{n-1} ... t_1$, lo cual es una contradicción porque en los grupos de coxeter ningun generador puede escribirse en terminos de los otros. En el caso en que haya un punto con tres lados adyacentes , consideremos la palabra $w = t_3t_2t_3t_1t_3t_2t_3t_1$. Esta palabra representa la permutación identidad en S_n como se muestra en la figura 2, pero no se puede reducir a la palabra vacia usando las relaciones $t_i^2 = e, (t_1t_2)^3 = e, (t_1t_3)^3 = e, (t_2t_3)^3 = e$. Recuerde que

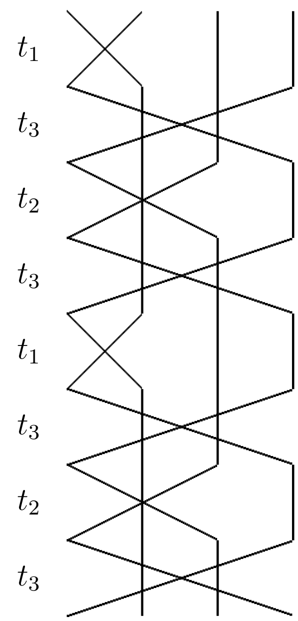

Figura 2: identidad en las permutaciones pero no reducible a palabra vacia

$$l(w) = |\{t : \ sign\Pi_{w^{-1}}(t) = -1\}|$$

mostraremos que $sign\Pi_{w^{-1}}(t_3) = -1$, y por lo tanto la longitud de w sería mayor igual a 1. Para esto tenemos que mirar cuantas de las siguientes igualdades se cumplen:

$$\begin{array}{rl}
t_3 = t_3 = (1,4) & si \\
t_3 = t_3t_2t_3 = (3,4) & no \\
t_3 = t_3t_2t_3t_2t_3 = (1,3) & no \\
t_3 = t_3t_2t_3t_1t_3t_2t_3 = (1,2) & no \\
t_3 = t_3t_2t_3t_1t_3t_1t_3t_2t_3 = (2,3) & no \\
t_3 = t_3t_2t_3t_1t_3t_2t_3t_1t_3t_2t_3 = (3,4) & no \\
t_3 = t_3t_2t_3t_1t_3t_2t_3t_2t_3t_1t_3t_2t_3 = (2,4) & no \\
t_3 = t_3t_2t_3t_1t_3t_2t_3t_1t_3t_2t_3t_1t_3t_2t_3 = (1,2) & no
\end{array}$$