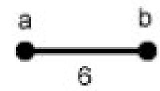
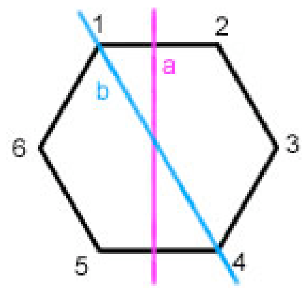
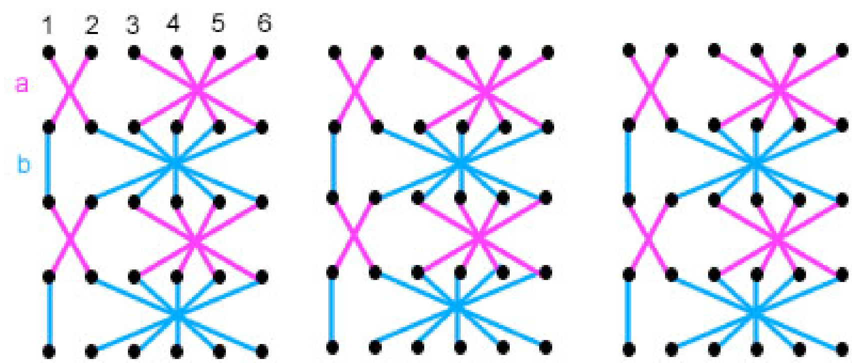


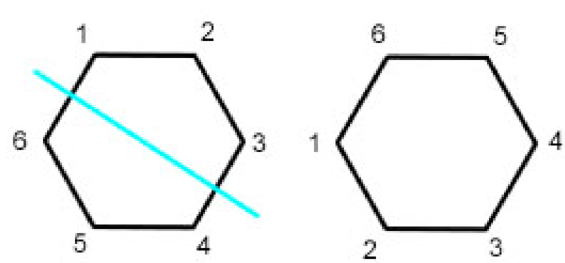
Veamos que $W \cong D_6$ y para esto queremos encontrar dos simetrías del hexágono a las que correspondan a y b:



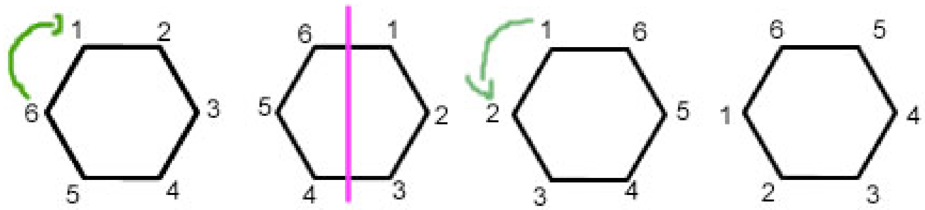
Estas dos simetrías corresponden a (216543), en el caso de a, y (165432), en el caso de b. Por el dibujo podemos saber que estas dos simetrías son idempotentes. Veamos que $((216543)\,(165432))^6 = 1$:



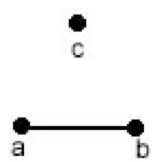
Si definimos $f : S \rightarrow D_6$ como $f(a) = (216543)$ y $f(b) = (165432)$ entonces ya vimos que $(f(a)f(b))^6 = 1$. Por el punto 3 de la tarea sabemos que f se extiende de forma única a un homomorfismo de grupos $f : W \rightarrow D_6$. Verifiquemos ahora que f es de hecho un isomorfismo. $(216543)\,(165432) = (612345)$, una rotación de $60°$ en el sentido de las manecillas del reloj. Esta rotación nos permite generar cuálquier rotación y junto con las reflecciones de la base, podemos generar todas las reflexiones. Para observar esto, supongamos que queremos generar la siguiente reflexión:



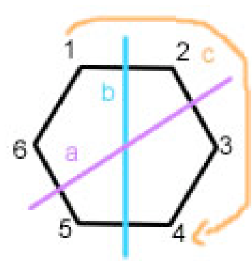
Entonces podemos hacer las siguientes rotaciones y reflexiones para generarla:



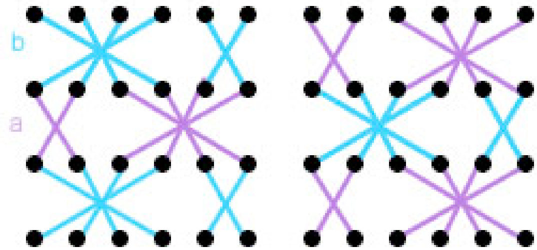
Similarmente podemos hacer esto con cualquier tipo de reflexión y por lo tanto estos dos elementos sí generan a todo D_6. Por lo tanto f es sobre. Ahora veamos que $|W| = |D_6| = 12$ con lo que demostraríamos que f es un isomorfismo. Todo palabra en W tiene longitud a lo sumo 6 pues sea w una palabra de longitud mayor a 6. Si w tiene repeticiones de letras, la podemos reducir a una palabra sin repeticiones de la forma $abababa...$ ó $bababab....$ Ahora como $ababab = bababa$ entonces $abababa... = bababaa... = babab...$ y $bababab... = abababb... = ababa...$ y así puedo seguir reduciendo sucesivamente cualquier pedazo de la palabra que tenga longitud mayor a 6 hasta llegar a una palabra cuya longitud es a lo sumo 6. Si una palabra w no tiene repeticiones y $\ell(w) \leq 6$ entonces no se puede reducir de ninguna manera. Entonces $W = \{1, a, b, ab, ba, aba, bab, abab, baba, ababa, babab, ababab = bababa\}$ y por lo tanto $|W| = |D_6| = 12$y tenemos que f es un isomorfismo.
Consideremos ahora el siguiente sistema de Coxeter (W, S') con $S' = \{a, b, c\}$ y el siguiente diagrama:



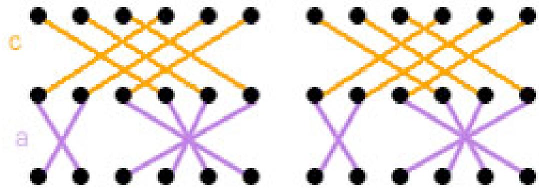
Veamos ahora que $W' \cong D_6$ de una manera muy similar a la anterior. Definamos $f' : S' \to D_6$ como $f'(a) = (216543)$, $f'(b) = (432165)$ y $f'(c) = (456123)$ que corresponden a las siguientes simetrías:



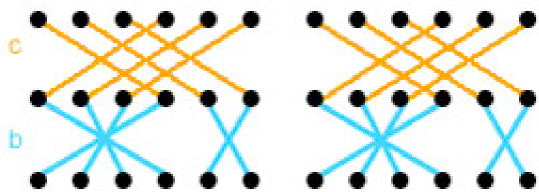
Veamos que $(f'(a)f'(b))^3 = 1$:



, que $(f'(a)f'(c))^2 = 1$:



, y que $(f'(b)f'(c))^2 = 1$:



Entonces f' se extiende a un homomorfismo $f' : W' \to D_6$. Igual que antes verifiquemos que esta función es sobre y que $|W'| = 12$ para concluir que es un isomorfismo. Ahora $(216543)\,(456123) = (165432)$, la simetría que junto con $f'(b)$ generan todo D_6 como vimos anteriormente. Entonces f' es sobreyectiva. Ahora $W' = \{1, a, b, c, ab, ac, ba, bc, aba, bca, acb, abac\}$ pues las relaciones entre los generadores dicen que a y c conmutan, al igual que b y c. Además $aba = bab$, y si a cualquiera de las palabras $1, a, b, c, ab, ac, ba, bc, aba, bca, acb, abac$ les pongo una letra después, esta palabra o ya está en esta lista, o se puede reducir a una en esta lista por medio de las reglas. Entonces $|W'| = 12$ y podemos concluir que $W'_6 \cong W$.