

- 3.** (\Rightarrow): Sean $u = s_1 \cdots s_k$ y $v = s'_1 \cdots s'_m$. Supongamos que $l(uv) = l(u) + l(v)$. Además supongamos que existe $t \in T$ tal que $l(ut) < l(u)$ y $l(tv) < l(v)$. Tenemos:

$$l(uv) = l(uttv) \leq l(ut) + l(tv) < l(u) + l(v) \quad (\rightarrow \leftarrow).$$

Luego, no existe una reflexión con esa propiedad.

(\Leftarrow): Por contradicción. Supongamos que $l(uv) < l(u) + l(v)$. Por eliminación existen i, j tales que

$$uv = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots s_k s'_1 \cdots \widehat{s}'_j \cdots s'_m.$$

Ahora, sean $t = s_k \cdots s_i \cdots s_k$ y $t' = s'_1 \cdots s'_j \cdots s'_1$. Tenemos que $ut = s_1 \cdots \widehat{s}_i \cdots s_k$ y que $t'v = s'_1 \cdots \widehat{s}'_j \cdots s'_m$, luego

$$uv = utt'v \Leftrightarrow e = tt' \Leftrightarrow t = t'.$$

Así, existe $t \in T$ tal que $l(ut) < l(u)$ y $l(tv) < l(v)$ pero esto contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, $l(uv) = l(u) + l(v)$.