COMBINATORIA ALGEBRAICA

Tarea 3

Federico Ardila

Fecha de entrega: 27 de Febrero de 2003

INSTRUCCIONES: Entregue 4 de los siguientes problemas. El problema 5 cuenta como 3 problemas diferentes. Cada problema vale entre 5 y 10 puntos, dependiendo de la solución y la dificultad del problema.

PROBLEMAS

1. (EC, Ejercicio Suplementario 3.1) Sea P un poset de n elementos. Para cada $x \in P$, sea c_x el número de elementos de P que son menores o iguales que x. Sea $e(P)$ el número de extensiones lineales de P. Demostrar que
$$e(P) \geq \frac{n!}{\prod_{x \in P} c_x}.$$

2. Demuestre que el poset Π_n de particiones de $[n]$ es un látice. ¿Para qué valores de n es distributivo?

3. Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ son dos particiones de n, se dice que λ **domina** a μ si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i$ para todo entero positivo i.

   Sea $\mathrm{Par}(n)$ el poset de particiones de n, donde $\lambda \geq \mu$ si y sólo si λ domina a μ.

   Demuestre que $\mathrm{Par}(n)$ es un látice.

4. Sea G un grafo finito cuyo conjunto de vértices es V. Un subconjunto $U \subseteq V$ es G-**conexo** si la restricción de G a U es conexa.

   Considere las particiones π del conjunto V tales que cada parte de π es G-conexa. Sea L_G el poset de tales particiones, ordenadas por refinamiento.

   Demuestre que L_G es un látice.

5. Sea A el conjunto de palabras finitas cuyos dígitos son 0's y 1's. Se define un orden parcial en A de la siguiente manera: las palabras que cubren a a son las palabras que se obtienen al cambiar un 1 de a por un 0, y la palabra que se obtiene al añadir un 1 al final de a.

   (a) Demuestre que A es un poset graduado, y que el número de elementos en el nivel i es igual a F_i, el i-ésimo número de Fibonacci.

   (b) Demuestre que A es un látice.

   (c) Demuestre que cualquier intervalo de A es un látice distributivo.

6. (EC, Ejercicio 3.22b) Sea L un látice distributivo finito y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función tales que, para cada $x \in L$, si x cubre a exactamente i elementos de L, entonces a x lo cubren exactamente $f(i)$ elementos de L. Demuestre que $L \cong B_k$ para algún entero positivo k.