Tarea corta # 4

Carolina Benedetti

Sea $I = \langle a^5, b^5, c^5, d^5, ab^2c^3d^4, a^2b^3c^4d, a^3b^4cd^2, a^4bc^2d^3 \rangle$ en $\mathbb{F}[a,b,c,d]$.

Veamos qué es el Scarf complex de I, Δ_I.

Sean $m_1 = a^5$ $\quad m_5 = ab^2c^3d^4$
$m_2 = b^5$ $\quad m_6 = a^2b^3c^4d$
$m_3 = c^5$ $\quad m_7 = a^3b^4cd^2$
$m_4 = d^5$ $\quad m_8 = a^4bc^2d^3$

Para $i \in \{1,2,..,8\}$ notaremos por i al exponente del monomio m_i.

Ahora, para describir Δ_I basta describir los subconjuntos $\sigma \subseteq [8]$ tales que $\sigma \in \Delta_I$ y $|\sigma| = 4$; pues sabemos que Δ_I es un complejo simplicial por tanto basta conocer sus elementos de tamaño maximal.

Notemos que si $|\sigma| = 5$ entonces $M = m.c.m\{m_i \mid i \in \sigma\} = m.c.m.\{m_i \mid i \in \sigma - \{j\}\}$ para algún $j \in \sigma$; esto se debe a que existe $k \in [4]$ t.q. $k \in \sigma$.

Así, si M (visto como una tupla de exponentes) contiene exáctamente un 5 en la posición i, entonces $M = m.c.m\{m_j \mid j \in \sigma - \{9-i\}\}$.

Si M contiene dos 5, entonces M consta de al menos un 4. Supongamos que 4 aparece en la posición i, entonces podemos suprimir el generador tal que su i-ésima componente sea mínima.

Si M contiene tres 5, entonces una de sus componentes (digamos k) es menor o igual que 4. Así, podemos suprimir el generador cuya k-ésima componente es mínima. Luego, obtenemos el mismo m.c.m.

Luego, $|\sigma| = 4$ es el caso más grande que debemos considerar.

Veamos cuáles son estas caras.

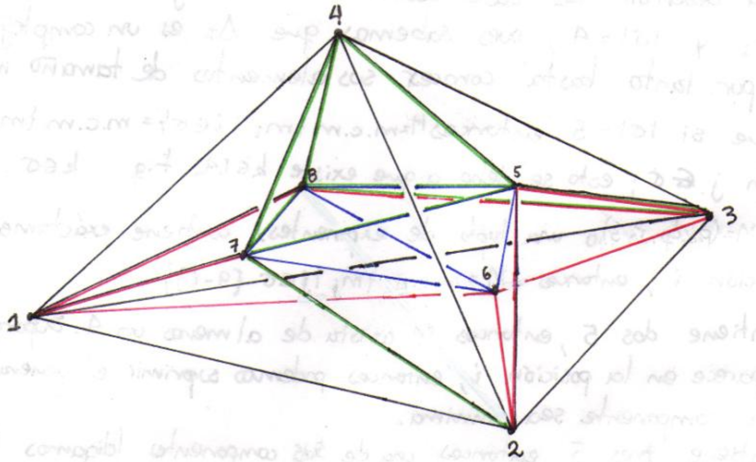
- 5678 (es decir, m.c.m $\{m_5, m_6, m_7, m_8\}$. Esta es la convención que usaremos).

- 18 ij con $i,j \in \{6,7\}$
  27 ij con $i,j \in \{5,6\}$
  36 ij con $i,j \in \{5,8\}$
  45 ij con $i,j \in \{7,8\}$

- 1267, 1358, 1478, 2356, 2457, 3458,
- 1236, 1247, 1348, 2345

Ahora, veamos la triangulación correspondiente del tetraedro con vértices

5000 = 1
0500 = 2
0050 = 3
0005 = 4
.



Lo cual concuerda con el cálculo realizado que produjo 24 aristas, a saber:
16, 17, 18, 25, 26, 27, 35, 36, 38, 45, 47, 48, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 56, 57, 58, 67, 68, 78.