⑤ sea $I = \langle x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n \rangle \subseteq \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] =: R$

sea Δ_I el simplicial complejo asociado al "square-free monomial ideal" I, i.e.

$$\Delta_I = \{ A \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\} \mid \forall_{1 \le i \le n} \{x_i, y_i\} \nsubseteq A \}$$

Afirmación: $\Delta_I = \Delta_1 * \Delta_2 * \cdots * \Delta_n$, donde

$$\Delta_i = \{ \emptyset, \{x_i\}, \{y_i\} \} \quad 1 \le i \le n$$

En efecto

$$\Delta_1 * \Delta_2 * \cdots * \Delta_n = \{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid \forall_{1 \le i \le n} \ A_i \in \Delta_i \}$$

$$= \{ A \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\} \mid \forall_{1 \le i \le n} \ |A \cap (\cup \Delta_i)| \le 1 \}$$

$$= \{ A \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\} \mid \forall_{1 \le i \le n} \ |A \cap \{x_i, y_i\}| \le 1 \}$$

$$= \{ A \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\} \mid \forall_{1 \le i \le n} \ |A \cap \{x_i, y_i\}| \ne 2 \}$$

$$= \{ A \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\} \mid \forall_{1 \le i \le n} \ \neg \left(A \cap \{x_i, y_i\} = \{x_i, y_i\} \right) \}$$

$= \{A \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\} \mid \forall_{1 \le i \le n} \ \{x_i, y_i\} \nsubseteq A\}$

$= \Delta_I$

por el punto 4, se tiene que:

$$h_{\Delta_I}(t) = h_{\Delta_1 * \cdots * \Delta_n}(t)$$
$$= h_{\Delta_1}(t) \cdot \cdots \cdot h_{\Delta_n}(t)$$

calculemos $h_{\Delta_i}(t)$, $1 \le i \le n$. Se tiene que el f-vector asociado a cada Δ_i es

$$f = (1, 2)$$

con lo cual, al calcular el h-vector obtenemos

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & \\ 1 & & 1 & & \end{array} \longrightarrow h = (1, 1)$$

con lo cual $h_{\Delta_i}(t) = 1 + t \quad \forall_{1 \le i \le n}$
y así

$$h_{\Delta_I}(t) = (1+t)^n$$

con lo cual, por el corolario visto en clase,

$$H(R/I ; x) = \frac{(1+t)^n}{(1-t)^n}$$

donde el n de $(1-t)^n$ aparece ya que n es el máximo cardinal de un elemento de Δ_I