

# Tres lecciones en combinatoria algebraica.

## III. Arreglos de hiperplanos.

Federico Ardila\*    Emerson León\*\*  
Mercedes Rosas\*\*\*    Mark Skandera\*\*\*\*

### Resumen

En esta serie de tres artículos, damos una exposición de varios resultados y problemas abiertos en tres áreas de la combinatoria algebraica y geométrica: las matrices totalmente no negativas, las representaciones del grupo simétrico  $S_n$ , y los arreglos de hiperplanos. Esta tercera parte presenta una introducción a los arreglos de hiperplanos desde un punto de vista combinatorio.

En la primavera del 2003, la Universidad de los Andes (Bogotá, Colombia), nos invitó a dar un ciclo de conferencias sobre la combinatoria algebraica. Fue una ocasión inolvidable, tanto por el placer de trabajar con sus estudiantes, excepcionalmente brillantes y motivados, como por la belleza de su campus y la hospitalidad de su gente. En esta tercera parte presenta una introducción a los arreglos de hiperplanos desde un punto de vista combinatorio. Estudiaremos las regiones, el polinomio característico, y el poset de intersecciones de un arreglo. También estudiaremos algunos arreglos especiales que están relacionados con objetos combinatorios clásicos.

## 1. Arreglos de rectas y arreglos de planos.

La siguiente pregunta servirá como motivación: Si trazamos  $n$  líneas rectas en el plano  $\mathbb{R}^2$ , ¿cuál es el mayor número de regiones que podemos formar?

Es fácil ver que para lograr que el número de regiones sea máximo, las rectas deben estar en *posición general*; es decir:

---

\*San Francisco State University, San Francisco, CA, USA y Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia, federico@sfsu.edu – financiado por la CAREER Award DMS-0956178 y la beca DMS-0801075 de la National Science Foundation de los Estados Unidos, y por la SFSU-Colombia Combinatorics Initiative.

\*\*Freie Universität Berlin, Alemania, emerson@zedat.fu-berlin.de -financiado por el Berlin Mathematical School.

\*\*\*Universidad de Sevilla, España, mrosas@us.es – financiada por los proyectos MTM2007–64509 del Ministerio de Ciencias e Innovación de España y FQM333 de la Junta de Andalucía.

\*\*\*\*Lehigh University, Bethlehem, PA, USA, mas906@math.lehigh.edu – financiado por la beca H98230-11-1-0192 de la National Security Agency de los Estados Unidos.

- No hay dos rectas paralelas.
- No hay tres rectas concurrentes.

En efecto, si algunas rectas del arreglo no cumplen estas propiedades, podemos moverlas un poco de manera que el número de regiones aumente. Lo sorprendente es que las dos condiciones anteriores son suficientes, y determinan de manera única el número de regiones que se forman.

**Teorema 1.1.** *Cualquier arreglo de  $n$  rectas en posición general en  $\mathbb{R}^2$  tiene el máximo número de regiones  $r(n)$  y de regiones acotadas  $b(n)$  entre todos los arreglos de  $n$  rectas. Estos valores máximos están dados por las fórmulas*

$$\begin{aligned} r(n) &= \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}, \\ b(n) &= \binom{n}{2} - \binom{n}{1} + \binom{n}{0}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Demostremos por inducción que los números  $r(n)$  y  $b(n)$  de regiones y de regiones acotadas determinadas por  $n$  rectas genéricas dependen sólo de  $n$ , y satisfacen las recurrencias

$$r(n) = r(n-1) + n, \quad b(n) = b(n-1) + (n-2), \quad (1)$$

El caso  $n = 0$  es claro. Consideremos  $n$  rectas en posición general. Si borramos una de ellas, las otras  $n-1$  dividen al plano en  $r(n-1)$  regiones,  $b(n-1)$  de las cuales son acotadas. Al volver a introducir la recta borrada, ésta dividirá a algunas de estas regiones en dos. Las  $n-1$  rectas dividen a la nueva recta en  $n$  sectores, de las cuales  $n-2$  son acotados. Por lo tanto, la nueva recta divide a  $n$  de las  $r(n-1)$  regiones, y exactamente  $n-2$  de éstas introducen una nueva región acotada. Las fórmulas explícitas para  $r(n)$  y  $b(n)$  se siguen.  $\square$

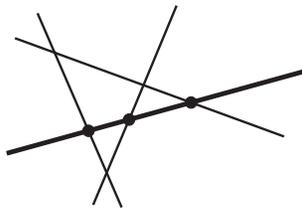


Figura 1: El efecto de introducir una nueva recta al arreglo.

Ahora generalizaremos el resultado anterior a tres dimensiones:

Si trazamos  $n$  planos en  $\mathbb{R}^3$ , ¿cuál es el mayor número de regiones que podemos formar?

Igual que en el caso anterior, es claro que para obtener el máximo número de regiones es necesario que los planos estén en *posición general*, en el siguiente sentido:

- No hay dos planos paralelos.
- No hay tres que se corten en una línea recta, ni tampoco tres que no se corten.
- No hay cuatro planos que pasen por un mismo punto.

Nuevamente, las tres condiciones anteriores determinan de manera única el número de regiones en las que se divide el espacio, y también el número de regiones acotadas, para cada valor de  $n$ . En este caso, llamaremos  $r_3(n)$  al número de regiones que son determinadas por  $n$  planos en posición general, y  $b_3(n)$  el número de regiones acotadas.

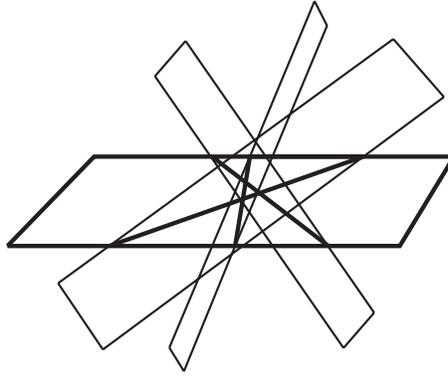


Figura 2: Planos en  $\mathbb{R}^3$  y su intersección en  $P$ .

**Teorema 1.2.** *Cualquier arreglo de  $n$  planos en posición general en  $\mathbb{R}^3$  tiene el máximo número de regiones  $r_3(n)$  y de regiones acotadas  $b_3(n)$  entre todos los arreglos de  $n$  planos. Estos números son*

$$r_3(n) = \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0},$$

$$b_3(n) = \binom{n}{3} - \binom{n}{2} + \binom{n}{1} - \binom{n}{0}.$$

*Demostración.* Nuevamente consideramos un plano especial  $P$  de un arreglo genérico de  $n$  planos, para obtener relaciones recursivas para  $r_3(n)$  y  $b_3(n)$ . Quitando este plano del arreglo, obtenemos un arreglo con  $n - 1$  planos en posición general, que genera  $r_3(n - 1)$  regiones, entre las cuales hay  $b_3(n - 1)$  regiones acotadas.

Los otros  $n - 1$  planos determinan  $n - 1$  rectas en  $P$ . Si los planos están en posición general, las rectas en  $P$  se encuentran en posición general. Por lo tanto ellas forman  $\binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$  regiones, de las cuales  $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$  son acotadas. Al volver a colocar el plano  $P$ , el número de estas regiones que son divididas en dos es igual al número de regiones que se forman en  $P$ ; es decir,  $r_2(n - 1) := r(n - 1) = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}$ . Cada región acotada en  $P$  genera

una nueva región acotada. Así obtenemos que

$$\begin{aligned} r_3(n) &= r_3(n-1) + r_2(n-1) = r_3(n-1) + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}, \\ b_3(n) &= b_3(n-1) + b_2(n-1) = b_3(n-1) + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}. \end{aligned} \tag{2}$$

De las recurrencias anteriores se obtienen las fórmulas deseadas.  $\square$

Estos dos ejemplos sugieren una generalización natural en cualquier dimensión. Es natural conjeturar que cualquier arreglo de  $n$  hiperplanos genéricos en  $\mathbb{R}^d$  tiene un cierto número de regiones  $r_d(n)$  y regiones acotadas  $b_d(n)$ , y es fácil adivinar cuáles son esos números. Esta generalización es correcta, y la demostraremos en el Teorema 3.11. Pero antes de hacerlo, debemos precisar el significado de los diferentes conceptos involucrados. Debemos saber qué son los hiperplanos, las regiones, y qué significa estar en posición general en el caso de dimensión  $d$ . En la siguiente sección introducimos estas definiciones.

## 2. Arreglos de hiperplanos

Si  $v = (v_1, \dots, v_d)$  y  $x = (x_1, \dots, x_n)$  son vectores en  $\mathbb{R}^d$ , denotamos el producto punto de  $v$  y  $x$  por  $v \cdot x = v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_dx_d$ .

**Definición 2.1.** Un *hiperplano* en  $\mathbb{R}^d$  es un conjunto de la forma

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : v \cdot x = a\},$$

donde  $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , y no todos los  $v_i$  son iguales a cero. Un *arreglo de hiperplanos*  $\mathcal{A}$  es una colección finita de hiperplanos en  $\mathbb{R}^d$ .

**Definición 2.2.** Un *subespacio afín* es un conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^d$ , tal que si  $x, y \in S$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$ .

Si  $S$  es un subespacio afín y  $x \in S$ , entonces la translación  $S - x$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^d$ . Esto nos permite definir la *dimensión* de  $S$  como la dimensión de  $S - x$  como espacio vectorial. Se encuentra por ejemplo que la dimensión de un hiperplano  $H$  es  $d - 1$  (pues su translación resulta ser el espacio ortogonal al vector  $v$ , tomando a  $H$  como en la Definición 2.1). Toda intersección de hiperplanos forma un subespacio afín, y todo subespacio afín de dimensión  $k$  se puede expresar como la intersección de  $d - k$  hiperplanos en  $\mathbb{R}^d$ .

Cada hiperplano  $H = \{x \in \mathbb{R}^d : v \cdot x = a\}$  divide a  $\mathbb{R}^d$  en dos regiones, donde  $v \cdot x < a$  y  $v \cdot x > a$  respectivamente.

Dado un arreglo de hiperplanos  $\mathcal{A}$ , este divide al espacio en varias componentes conexas, llamadas *regiones*. Si  $\mathcal{A}$  está formado por  $n$  hiperplanos

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^d : v_i \cdot x = a_i\},$$

donde  $v_i \in \mathbb{R}^d$  para  $1 \leq i \leq n$ , cada *región* de  $\mathcal{A}$  puede ser descrita con un sistema de desigualdades **que tiene solución** en  $\mathbb{R}^d$ , donde se selecciona una desigualdad de la forma

$$v_i \cdot x < a_i \quad \text{o} \quad v_i \cdot x > a_i$$

para cada  $1 \leq i \leq n$ .

**Definición 2.3.** Un arreglo de hiperplanos se encuentra en *posición general* si se cumplen las siguientes condiciones:

- Dos hiperplanos distintos siempre se intersectan.
- Tres hiperplanos siempre se intersectan en un subespacio afín de dimensión  $d - 3$ .
- Cuatro hiperplanos siempre se intersectan en un subespacio afín de dimensión  $d - 4$ .
- $\vdots$
- $d$  hiperplanos siempre se intersectan en un punto.
- $d + 1$  hiperplanos nunca se intersectan.

Las condiciones anteriores pueden resumirse diciendo que para todo subconjunto de  $r$  hiperplanos del arreglo, con  $0 \leq r \leq d$ , la intersección es un subespacio afín de dimensión  $d - r$ ; y que para más de  $d$  hiperplanos, la intersección siempre es vacía. Podemos ver la intersección de un conjunto de  $r$  hiperplanos como el conjunto solución de un sistema de  $r$  ecuaciones con  $d$  incógnitas. Un arreglo es genérico cuando cualesquiera  $r$  ecuaciones son linealmente independientes.

Luego de precisar estos conceptos, es posible demostrar la generalización natural de los Teoremas 1.1 y 1.2 en cualquier dimensión. Sin embargo, procederemos de manera diferente; vamos a desarrollar herramientas generales que nos permitan entender esta situación más conceptualmente.

### 3. Posets de intersección, funciones de Möbius, y polinomios característicos

Recordemos que un *conjunto parcialmente ordenado* o *poset*<sup>1</sup>  $P$  es un conjunto  $P$  junto con una relación binaria  $\leq$  de “orden parcial” tal que:

- Para todo  $x$  se tiene que  $x \leq x$ .
- Si  $x \leq y$  y  $y \leq x$  entonces  $x = y$ .
- Si  $x \leq y$  y  $y \leq z$  entonces  $x \leq z$ .

---

<sup>1</sup>del inglés “partially ordered set”

**Definición 3.1.** El *poset de intersección*  $L(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$  es el conjunto de las diferentes intersecciones no vacías de los subconjuntos de  $\mathcal{A}$ , incluyendo a los mismos hiperplanos y al espacio completo (que es la intersección del subconjunto vacío). Este conjunto está parcialmente ordenado por la relación  $X \leq Y$  para cada par de elementos  $X, Y \in L(\mathcal{A})$  tales que  $Y \subseteq X$ .

**Ejemplo 3.2.** La Figura 3 muestra un arreglo en  $\mathbb{R}^2$  y su poset de intersección.

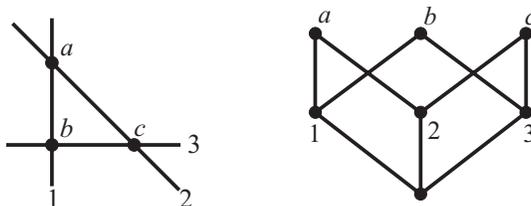


Figura 3: Poset de intersección de un arreglo.

**Definición 3.3.** Sea  $P$  un poset finito con elemento mínimo  $\hat{0}$ . La *función de Möbius*  $\mu : P \rightarrow \mathbb{Z}$  de  $P$  se define recursivamente por:

- i)  $\mu(\hat{0}) = 1$ .
- ii)  $\mu(X) = -\sum_{Y < X} \mu(Y)$ , para todo  $X \neq \hat{0}$ .

Gian-Carlo Rota [10] fue el precursor del estudio de la función de Möbius de un poset, una teoría muy elegante que conecta resultados en la teoría de los números (la función de Möbius clásica), la combinatoria enumerativa (la fórmula de inclusión-exclusión), y la topología (la característica de Euler), entre otras. Nosotros aplicaremos esta teoría a los arreglos de hiperplanos.

**Definición 3.4.** El *polinomio característico*  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  del arreglo  $\mathcal{A}$  es

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X)t^{\dim(X)}.$$

Vale la pena tener en cuenta que la función de Möbius y el polinomio característico de un arreglo  $\mathcal{A}$  dependen únicamente del poset  $L(\mathcal{A})$  y la dimensión del espacio.

**Ejemplo 3.5.** La Figura 4 muestra los valores de la función  $\mu$  en el poset  $L(\mathcal{A})$  del ejemplo 3.5. El polinomio característico de  $\mathcal{A}$  es  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 3t + 3$ .

**Teorema 3.6.** El *polinomio característico* de un arreglo de  $n$  hiperplanos en posición general en  $\mathbb{R}^d$  es

$$\chi(t) = t^d - \binom{n}{1}t^{d-1} + \binom{n}{2}t^{d-2} - \dots + (-1)^d \binom{n}{d}. \quad (3)$$

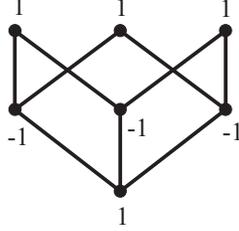


Figura 4: Función de Möbius de  $L(\mathcal{A})$ .

*Demostración.* En este caso los elementos de  $L(\mathcal{A})$  de dimensión  $d-k$  son todas las posibles intersecciones de  $k$  hiperplanos, que son todas distintas; hay  $\binom{n}{k}$  de ellas. Además, dado un elemento  $X$  de  $L(\mathcal{A})$  de dimensión  $d-k$  que es la intersección de  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  con  $|\mathcal{B}| = k$ , los elementos  $Y$  tales que  $Y \leq X$  son las intersecciones de los subconjuntos de  $\mathcal{B}$ . Por lo tanto hay  $\binom{k}{l}$  elementos de  $L(\mathcal{A})$  de dimensión  $d-l$  menores que  $X$ . Usando esto, demostraremos inductivamente que  $\mu(X) = (-1)^k$ .

Para ver esto, primero observamos que  $\mu(\mathbb{R}^d) = (-1)^0 = 1$ . Para otro elemento  $X \in L(\mathcal{A})$  de dimensión  $d-k$ , se encuentra que

$$\mu(X) = - \sum_{Y < X} \mu(Y) = - \left( 1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} \right) = (-1)^k,$$

ya que la suma contiene  $\binom{k}{l}$  elementos de dimensión  $d-l$ , cuya función de Möbius es  $(-1)^l$  por inducción. El resultado se sigue.  $\square$

Existe una clara relación entre el polinomio característico de un arreglo genérico (Teorema 3.6) y los números de regiones y de regiones acotadas de tal arreglo para  $d = 2, 3$  (Teoremas 1.1 y 1.2). Nuestro siguiente objetivo es aclarar esta relación, en el Teorema 3.9.

**Definición 3.7.** La *dimensión* de un arreglo  $\mathcal{A}$  en  $\mathbb{R}^n$  es  $\dim(\mathcal{A}) = n$ . El *rango* de  $\mathcal{A}$  es la dimensión del espacio  $V_{\mathcal{A}}$  generado por los vectores  $v_i$  normales a cada uno de los hiperplanos, y se denota  $\text{rango}(\mathcal{A})$ . Decimos que  $\mathcal{A}$  es *esencial* si  $\dim(\mathcal{A}) = \text{rango}(\mathcal{A})$ .

Si un arreglo  $\mathcal{A}$  no es esencial, la intersección de los hiperplanos de  $\mathcal{A}$  es un espacio afín  $L$ . Podemos *esencializar* el arreglo, considerando el arreglo  $\mathcal{A}^{es} = \{H \cap L^\perp : H \in \mathcal{A}\}$  de hiperplanos en el espacio  $L^\perp$  ortogonal a  $L$ . Es claro que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^{es}$  tienen el mismo poset de intersección, y también que las regiones de estos dos arreglos están en biyección.

**Definición 3.8.** Una región de  $\mathcal{A}$  es *relativamente acotada* si la región correspondiente de  $\mathcal{A}^{es}$  es un conjunto acotado (en el sentido usual). Sean  $r(\mathcal{A})$  y  $b(\mathcal{A})$  el número de regiones de  $\mathcal{A}$  y el número de regiones relativamente acotadas de  $\mathcal{A}$ , respectivamente.

La definición anterior es necesaria ya que un arreglo no esencial no tiene regiones acotadas. Para simplificar, de ahora en adelante, cuando hablemos de regiones acotadas estaremos

refiriéndonos a las regiones relativamente acotadas. El siguiente teorema relaciona el número de regiones y de regiones acotadas de un arreglo con su polinomio característico.

**Teorema 3.9** (Zaslavsky, [18]). *Los números de regiones y de regiones acotadas de un arreglo  $\mathcal{A}$  en  $\mathbb{R}^d$  están dadas por:*

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^d \chi_{\mathcal{A}}(-1), \quad b(\mathcal{A}) = (-1)^{\text{rango}(\mathcal{A})} \chi_{\mathcal{A}}(1).$$

Este teorema se demostrará usando una idea que ya hemos expuesto en los ejemplos iniciales, que se conoce como el *método de eliminación/contracción*. Esta es una de las técnicas más útiles para llevar a cabo argumentos inductivos en arreglos de hiperplanos. Consiste en expresar cierta información de un arreglo en términos de los siguientes dos arreglos más pequeños:

**Definición 3.10.** Sea  $\mathcal{A}$  un arreglo de hiperplanos en  $\mathbb{R}^d$  y  $H$  un hiperplano de  $\mathcal{A}$ .

- La *eliminación de  $H$*  es el arreglo  $\mathcal{A} - H$  en  $\mathbb{R}^d$  formado por todos los hiperplanos de  $\mathcal{A}$  excepto  $H$ .
- La *contracción de  $H$*  es el arreglo  $\mathcal{A}/H = \{H' \cap H : H' \in \mathcal{A} - H\}$  de hiperplanos en  $H \cong \mathbb{R}^{d-1}$ .

*Demostración del Teorema 3.9.* Usando el mismo argumento de los Teoremas 1.1 y 1.2 obtenemos las fórmulas recursivas

$$r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A} - H) + r(\mathcal{A}/H), \quad b(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A} - H) + b(\mathcal{A}/H). \quad (4)$$

Basta ver que cada región de  $\mathcal{A}/H$  está partiendo una región de  $\mathcal{A} - H$  en dos, dando como resultado todas las regiones de  $\mathcal{A}$ . Algo similar sucede con las regiones acotadas.

Por otro lado, vamos a demostrar la siguiente fórmula recursiva para el polinomio característico de un arreglo

$$\chi_{\mathcal{A}}(q) = \chi_{\mathcal{A}-H}(q) - \chi_{\mathcal{A}/H}(q). \quad (5)$$

Para hacerlo, vamos a demostrar que

$$\mu_{\mathcal{A}}(X) = \mu_{\mathcal{A}-H}(X) - \mu_{\mathcal{A}/H}(X), \quad (6)$$

para todo  $X \in L(\mathcal{A})$ , donde el subíndice indica el arreglo en el cual se calcula la función. Si  $X \notin L(\mathcal{A}')$  definimos  $\mu_{\mathcal{A}'}(X) = 0$ .

Esto lo podemos ver por inducción en  $d - l$  donde  $l$  es la dimensión de  $X$ . Es decir, por inducción comenzando por los menores elementos de  $L(\mathcal{A})$ . Para  $X = \mathbb{R}^d$ , se cumple que  $X \notin \mathcal{A}/H$ , por lo que  $\mu_{\mathcal{A}}(\mathbb{R}^d) = \mu_{\mathcal{A}-H}(\mathbb{R}^d) - \mu_{\mathcal{A}/H}(\mathbb{R}^d) = 1$ . Para los hiperplanos del arreglo también se verifica la identidad anterior, notando que si  $X \neq H$ , entonces  $\mu_{\mathcal{A}/H}(X) = 0$ ,

mientras que si  $X = H$ , entonces  $\mu_{\mathcal{A}-H}(X) = 0$  y  $\mu_{\mathcal{A}/H}(H) = 1$ . Para los demás elementos  $X \in L(\mathcal{A})$ , se tiene por hipótesis de inducción que

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{A}}(X) &= - \sum_{Y <_{\mathcal{A}} X} \mu_{\mathcal{A}}(Y) = - \sum_{Y <_{\mathcal{A}} X} \mu_{\mathcal{A}-H}(Y) + \sum_{Y <_{\mathcal{A}} X} \mu_{\mathcal{A}/H}(Y) \\ &= - \sum_{Y <_{\mathcal{A}-H} X} \mu_{\mathcal{A}-H}(Y) + \sum_{Y <_{\mathcal{A}/H} X} \mu_{\mathcal{A}/H}(Y) = \mu_{\mathcal{A}-H}(X) - \mu_{\mathcal{A}/H}(X)\end{aligned}$$

donde  $Y <_{\mathcal{B}} X$  denota que  $Y < X$  en el poset de intersección del arreglo  $\mathcal{B}$ . El resultado se sigue.  $\square$

Como corolario del teorema anterior, se encuentra que el número de regiones y el número de regiones acotadas de un arreglo tan sólo dependen de su poset de intersección. Veremos varias aplicaciones de este teorema. La primera es la generalización de los Teoremas 1.1 y 1.2 a  $d$  dimensiones.

**Teorema 3.11.** *Cualquier arreglo de  $n$  hiperplanos en posición general en  $\mathbb{R}^d$  tiene el máximo número de regiones  $r_d(n)$  y de regiones acotadas  $b_d(n)$  entre todos los arreglos de  $n$  hiperplanos en  $\mathbb{R}^d$ . Estos números son*

$$\begin{aligned}r_d(n) &= \binom{n}{d} + \binom{n}{d-1} + \cdots + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}, \\ b_d(n) &= \binom{n}{d} - \binom{n}{d-1} + \cdots + (-1)^{d-1} \binom{n}{1} + (-1)^d \binom{n}{0}.\end{aligned}$$

*Demostración.* Esta es una consecuencia inmediata de los Teoremas 3.6 y 3.9.  $\square$

## 4. Arreglos en campos finitos

Vamos a considerar ahora arreglos de hiperplanos sobre otros campos distintos a  $\mathbb{R}$ . En particular, resulta útil considerar arreglos en un espacio vectorial finito  $\mathbb{F}_q^d$ , aún si nuestro interés principal son los arreglos reales. Acá  $\mathbb{F}_q$  es el campo finito de  $q$  elementos, donde  $q = p^\alpha$ ,  $p$  es un número primo y  $\alpha \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Algunas nociones como el número de regiones no existen (pues  $\mathbb{F}_q$  no es un campo ordenado), pero otras nociones como el poset de intersección permanecen iguales, y permiten darle nuevas interpretaciones al polinomio característico.

Supongamos que  $\mathcal{A}$  es un arreglo en  $\mathbb{R}^d$  cuyas ecuaciones tienen coeficientes enteros. Utilizando las mismas ecuaciones sobre el campo finito  $\mathbb{F}_q$ , obtenemos un arreglo  $\mathcal{A}_q$  en  $\mathbb{F}_q^d$ . El siguiente resultado reduce el cálculo del polinomio característico de  $\mathcal{A}$  a un problema enumerativo en  $\mathbb{F}_q^d$ .

**Teorema 4.1** (Crapo-Rota, Athanasiadis). *El número de puntos en  $\mathbb{F}_q^d$  que no pertenecen al arreglo  $\mathcal{A}_q$  es igual a  $\chi_{\mathcal{A}}(q)$  para todo  $q = p^\alpha$  donde  $p$  es un primo suficientemente grande.*

*Demostración.* Cada intersección de hiperplanos  $Y \in L(\mathcal{A}_q)$  es un espacio afín de dimensión  $k$ , y por lo tanto tiene  $q^k$  elementos. Así cada sumando  $\mu(Y)q^k$  en la definición de  $\chi_{\mathcal{A}}(q)$  cuenta el número de puntos de  $Y$  multiplicado por  $\mu(Y)$ . Luego, cada punto  $v$  de  $\mathbb{F}_q^d$  contribuye a  $\chi_{\mathcal{A}}(q)$  un total de  $\sum_{Y: v \in Y} \mu(Y) = \sum_{Y \leq X} \mu(Y)$ , donde  $X$  es el mínimo elemento de  $L(\mathcal{A})$  que contiene a  $v$ . Esta suma es igual a 0 si  $X \neq \mathbb{F}_q^d \in L(\mathcal{A}_q)$  y es igual a 1 si  $X = \mathbb{F}_q^d$  es el mínimo elemento del poset. Por lo tanto los únicos puntos que contribuyen son los que no están en ningún hiperplano de  $\mathcal{A}$ , y  $\chi_{\mathcal{A}_q}(q) = |\mathbb{F}_q^d - \mathcal{A}_q|$ .

Por último, observamos que cada elemento de  $L_{\mathcal{A}}$  es el espacio de soluciones a un sistema de ecuaciones lineales, y si  $p$  es suficientemente grande se tiene que hay un elemento correspondiente de  $L_{\mathcal{A}_q}$  que satisface las mismas ecuaciones (en  $\mathbb{F}_q$ ). En ese caso, tendremos que  $L_{\mathcal{A}} \cong L_{\mathcal{A}_q}$  y también  $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_q}$ . El resultado se sigue.  $\square$

El teorema anterior puede ser de gran ayuda para calcular el polinomio característico de un arreglo, pues en muchos casos es fácil contar los puntos en cuestión en términos de  $q$ . Con frecuencia nos enfocaremos en el caso en que  $q$  es un primo suficientemente grande.

**Ejemplo 4.2.** Volviendo al arreglo del Ejemplo 3.2, consideremos el arreglo en  $\mathbb{F}_q^2$  dado por las ecuaciones

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1.$$

Es fácil ver que el número de puntos que no pertenece a ningún hiperplano está dado por

$$(q-1)^2 - (q-2) = q^2 - 3q + 3 = \chi_{\mathcal{A}}(q).$$

En este caso, el método de los campos finitos nos permite verificar fácilmente que el polinomio característico coincide con el del Ejemplo 3.5. Para apreciar verdaderamente su utilidad, es necesario estudiar ejemplos más interesantes, en los cuales el método de campos finitos puede simplificar increíblemente los cálculos. En la sección siguiente vamos a ver varios ejemplos importantes.

## 5. Varios arreglos interesantes

### 5.1. El arreglo de trenzas

**Definición 5.1.** El *arreglo de trenzas* (también conocido como *arreglo trenza*), denotado por  $\mathcal{B}_n$ , es un arreglo en  $\mathbb{R}^n$ , formado por todos los  $\binom{n}{2}$  planos  $H_{ij}$  de la forma  $x_i - x_j = 0$ , para  $1 \leq i < j \leq n$ .

Este arreglo puede verse como la variedad algebraica  $Z(\Delta_n)$ , que consiste de los ceros del polinomio de Vandermonde  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ . Veamos cómo el método de campos finitos nos permite calcular fácilmente el polinomio característico de este arreglo.

**Teorema 5.2.** *El polinomio característico del arreglo trenza  $\mathcal{B}_n$  es*

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(t) = t(t-1)(t-2)(t-3)\cdots(t-n+1).$$

*Demostración.* Al considerar  $\mathcal{B}_n$  sobre el campo finito  $\mathbb{F}_q$  para un primo  $q$  suficientemente grande, vemos que el número de puntos de  $\mathbb{F}_q^n$  que no pertenece a ningún hiperplano está dado por

$$q(q-1)(q-2)(q-3)\cdots(q-n+1) = \chi_{\mathcal{B}_n}(q),$$

pues tan solo debemos escoger como coordenadas a  $n$  elementos distintos de  $\mathbb{F}_q$ . Para la primera coordenada hay  $q$  posibilidades, para la siguiente  $q-1$  y así sucesivamente. Como esta igualdad es válida para infinitos valores de  $q$ , debe ser una igualdad de polinomios.  $\square$

Para el arreglo de trenzas también es posible, pero mucho más difícil, calcular el polinomio característico usando la función de Möbius. Por ejemplo, para  $n=4$ , el poset de intersección de  $\mathcal{B}_4$  se muestra en la Figura 5.

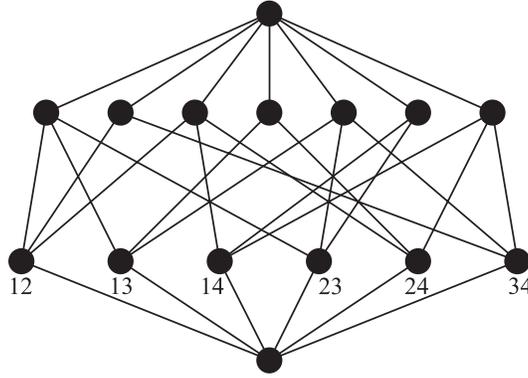


Figura 5: Poset de intersección de  $\mathcal{B}_4$ .

Cada elemento marcado con un par  $ij$  representa al hiperplano  $x_i = x_j$ .

**Corolario 5.3.** *El arreglo de trenzas  $\mathcal{B}_n$  tiene  $r(\mathcal{B}_n) = n!$  regiones, ninguna de las cuales es acotada.*

*Demostración.* Esta es una consecuencia inmediata del Teorema de Zaslavsky (Teorema 3.9) y del Teorema 5.2. Es fácil e ilustrativo dar una prueba directa de estas afirmaciones. La segunda igualdad es clara ya que todos los hiperplanos pasan por el origen. La primera igualdad tiene una sencilla explicación combinatoria. Cada región está dada por un sistema de desigualdades, donde para cada par  $i, j$  se elige si  $x_i < x_j$  o  $x_j < x_i$ . Juntando todas las desigualdades, podemos encontrar en qué orden se encuentran todos los  $x_i$ . Además, cada orden posible de las  $n$  coordenadas determina una única región. Así concluimos que las regiones de  $\mathcal{B}_n$  están en biyección con las  $n!$  permutaciones de  $\{1, \dots, n\}$ .  $\square$

**Ejemplo 5.4.** En la Figura 6 se muestran las regiones del arreglo de trenzas para el caso  $n = 3$ .

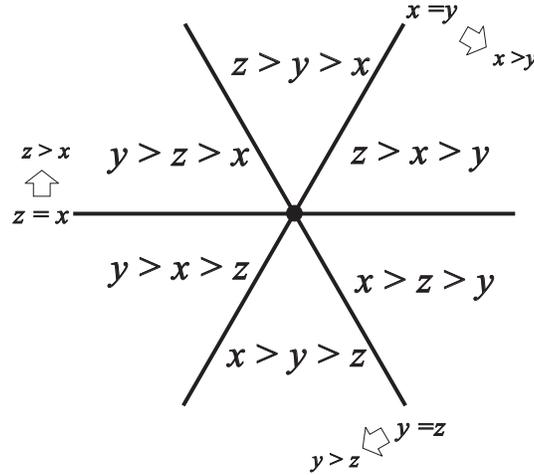


Figura 6: Regiones del arreglo  $\mathcal{B}_3$ .

Este es un arreglo en  $\mathbb{R}^3$ ; pero como todos los hiperplanos contienen la línea  $\mathbb{R}(1, 1, 1)$ , dibujamos su esencialización, intersectando el arreglo con el plano  $x + y + z = 0$ .

## 5.2. Arreglos Gráficos

Un tema clásico de la teoría de grafos es el de las *coloraciones propias* de un grafo  $G$ . Estas son las coloraciones de los vértices del grafo tales que dos vértices unidos por un arco no pueden tener el mismo color. Se puede demostrar que existe un polinomio  $\chi_G(x)$ , conocido como el *polinomio cromático* de  $G$ , con la siguiente propiedad: si tenemos  $t$  colores disponibles, el número de coloraciones propias del grafo  $G$  es igual a  $\chi_G(t)$ . Algunas propiedades de estos polinomios se pueden encontrar en [15].

**Definición 5.5.** Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices numerados de 1 a  $n$ . El *arreglo gráfico* de hiperplanos  $\mathcal{A}_G$  en  $\mathbb{R}^n$  está dado por los hiperplanos de la forma  $x_i - x_j = 0$  para cada par de vértices  $i, j$  que estén unidos por un arco.

**Teorema 5.6.** Para todo grafo  $G$ , el polinomio cromático de  $G$  es igual al polinomio característico de  $\mathcal{A}_G$ :  $\chi_G(t) = \chi_{\mathcal{A}_G}(t)$ .

*Demostración.* Considerando el arreglo  $\mathcal{A}_G$  sobre el campo finito  $\mathbb{F}_q$ , vemos que los puntos de  $\mathbb{F}_q^n$  que no pertenecen a ninguno de los hiperplanos están en biyección con las coloraciones propias de  $G$  con  $q$  colores: la  $i$ -ésima coordenada del punto nos da el color del vértice  $i$  en la coloración. Usando el Teorema 4.1 concluimos que  $\chi_G(q) = \chi_{\mathcal{A}_G}(q)$  para casi todo primo  $q$ , y por lo tanto  $\chi_G = \chi_{\mathcal{A}_G}$  como polinomios.  $\square$

También es posible dar una interpretación al número de regiones un arreglo gráfico, con lo cual el polinomio característico contendría aún más información del grafo. Para ver esto, nótese que cada región de un arreglo gráfico  $\mathcal{A}_G$  está determinada por un sistema de desigualdades de la forma  $x_i < x_j$ , para cada pareja de vértices  $i, j$  unida por un arco. Estas desigualdades se pueden marcar en el grafo, poniendo en cada arco una flecha de  $i$  hasta  $j$  si  $x_i < x_j$  o viceversa. Así, cada sistema de desigualdades define una orientación de los arcos de  $G$ , como se muestra en la figura 7.

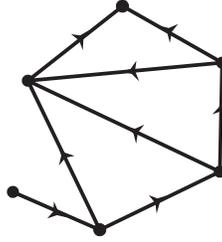


Figura 7: Orientación acíclica de un grafo.

**Lema 5.7.** *Un sistema de desigualdades para un arreglo gráfico tiene solución si y sólo si su orientación correspondiente no tiene ciclos.*

*Demostración.* Si el sistema de desigualdades tiene solución, el grafo no puede tener ciclos, pues esto implicaría desigualdades de la forma  $x_i < x_j < \dots < x_i$ . Por otro lado, dada una orientación acíclica, vamos a mostrar que el sistema de desigualdades correspondiente tiene solución, de forma inductiva sobre el número de vértices  $n$ . Para  $n = 1$ , el resultado es obvio. Para  $n \geq 2$ , como el grafo es acíclico, debe haber al menos un vértice  $v$  del que no sale ninguna flecha. Podemos entonces retirar a  $v$  del grafo, junto con todos los arcos que llegan a  $v$ . El grafo  $G'$  orientado que resulta también es acíclico y con menos vértices que el original. Usando la hipótesis de inducción, es posible construir una solución al sistema correspondiente a  $G'$ ; y dándole a la variable asociada a  $v$  un valor menor a todos los demás, obtenemos una solución a nuestro sistema de desigualdades.  $\square$

**Teorema 5.8** (Stanley). *El número de orientaciones acíclicas de un grafo  $G$  es  $(-1)^n \chi_G(-1)$ .*

*Demostración.* Basta notar que

$$r(\mathcal{A}_G) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}_G}(-1) = (-1)^n \chi_G(-1).$$

y que las orientaciones acíclicas de  $G$  están en biyección con las regiones del arreglo  $\mathcal{A}_G$ .  $\square$

Es muy interesante que el estudio de arreglos de hiperplanos nos haya permitido demostrar fácilmente este teorema puramente combinatorio.

Volvamos brevemente al tema de la ubicación de los ceros de polinomios combinatorios, que ya apareció en el primero de estos tres artículos. El problema de la ubicación de los ceros de  $\chi_G(t)$  ha recibido gran interés, en parte gracias a su relación con el famoso Teorema de los Cuatro Colores. Este teorema dice que cualquier mapa puede ser coloreado con cuatro colores sin que haya dos países vecinos del mismo color. Esta afirmación es equivalente a decir que si  $G$  es plano (es decir, que puede pintarse en el plano sin que los arcos se corten), entonces  $\chi_G(4) \neq 0$ . Otros resultados conocidos son los siguientes [11, 12]:

- Todas las raíces reales de  $\chi_G$  son mayores o iguales que 0.
- Para un grafo plano, todas las raíces reales son menores que 5. (Dijimos también que no podían ser 4, pero no se sabe si puede haber raíces entre 4 y 5).
- Cualquier raíz (real o compleja)  $r$  satisface que  $|r| < 8d$ , donde  $d$  es el máximo grado de un vértice del grafo.
- El conjunto de todas las raíces de todos los polinomios cromáticos es denso en el plano complejo  $\mathbb{C}$ .

### 5.3. Arreglo de Catalan

Los *números de Catalan*  $C_n$  están dados por la fórmula

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

para  $n \in \mathbb{N}$ . Los *números de Catalan* aparecen naturalmente en una gran cantidad de contextos matemáticos. En particular, uno de los ejercicios del libro [14] contiene cientos de problemas combinatorios cuya respuesta son los números de Catalan. Un ejemplo importante es el siguiente: el número de Catalan  $C_n$  es el número de *sucesiones de votación*  $b_1, b_2, \dots, b_{2n}$  donde cada  $b_i$  es 1 o  $-1$ , tales que

$$b_1 + \dots + b_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, 2n-1 \quad \text{y} \quad b_1 + \dots + b_{2n} = 0.$$

El nombre proviene de un modelo de unas elecciones donde  $2n$  votantes votan por uno de dos candidatos A y B. Los votos se reciben en orden, y el candidato A nunca está detrás del candidato B, pero al final el resultado es un empate.

Los números de Catalan cumplen la relación de recurrencia:

$$C_0 = 1, \quad C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \dots + C_n C_0 \quad (n \geq 0).$$

**Definición 5.9.** El *arreglo de Catalan*  $\mathcal{C}_n$  es el arreglo en  $\mathbb{R}^n$  formado por los hiperplanos

$$x_i - x_j = -1, \quad x_i - x_j = 0, \quad x_i - x_j = 1 \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

**Teorema 5.10.** *El polinomio característico del arreglo de Catalan es*

$$\chi_{C_n}(t) = t(t - n - 1)(t - n - 2)(t - n - 3) \cdots (t - 2n + 1).$$

*Demostración.* Usaremos nuevamente el método de campos finitos (Teorema 4.1). Sea  $q > 2n$  un primo, y encontremos el número de formas de seleccionar  $n$  valores  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en  $\mathbb{F}_q^n$ , de forma que no haya valores repetidos ni dos valores consecutivos entre las coordenadas. Para el valor de  $x_1$  hay  $q$  posibilidades. Para escoger los valores que pueden tomar las otras coordenadas  $x_i$ , hay en total  $\binom{q-n-1}{n-1}(n-1)!$  posibilidades; ya que si escogemos  $n-1$  enteros  $z_1 < z_2 < \cdots < z_{n-1}$  entre 1 y  $q-n-1$ , podemos darle a las otras  $n-1$  coordenadas de  $x$  los valores  $x_1 + z_1 + 1, x_1 + z_2 + 2, \dots$ , y  $x_1 + z_{n-1} + n - 1$  en cualquiera de los  $(n-1)!$  ordenes posibles. Los  $n$  valores que resultan son distintos y no hay dos consecutivos. En la dirección contraria, dado un punto  $x$  en  $\mathbb{F}_q^n$  que no está en ningún hiperplano, es fácil recuperar los valores de  $x_1, z_1, \dots, z_{n-1}$ .

Concluimos entonces que el número de puntos de  $\mathbb{F}_q^n$  que no están en ninguno de los hiperplanos de  $C_n$  es

$$q \binom{q-n-1}{n-1} (n-1)! = q(q-n-1)(q-n-2)(q-n-3) \cdots (q-2n+1),$$

y de aquí el resultado se sigue. □

**Teorema 5.11.** *El número de regiones determinadas por el arreglo  $C_n$  es  $n!C_n$  y el número de regiones acotadas es  $n!C_{n-1}$ .*

*Demostración.* Combinando el Teorema de Zaslavsky (Teorema 3.9) con el Teorema 5.10, obtenemos una prueba directa de estos resultados. Vamos a esbozar una segunda demostración que aclara la relación entre los arreglos de Catalan y los números de Catalan. La demostración completa se encuentra, por ejemplo, en [6].

El arreglo de Catalan contiene al arreglo de trenzas, que divide a  $\mathbb{R}^n$  en  $n!$  sectores iguales. En cada sector, el orden de las coordenadas de los puntos está dado por una permutación fija. Consideremos por ejemplo la región  $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$  de  $\mathcal{B}_n$ ; vamos a demostrar que el arreglo de Catalan la divide en  $C_n$  subregiones. Para especificar una de estas subregiones, debemos decidir si  $x_i - x_j < 1$  o  $x_i - x_j > 1$  para cada  $i < j$ . (Ya sabemos que  $x_i - x_j > -1$  para cada  $i < j$ .) En otras palabras, debemos decidir el orden de los números  $x_1, \dots, x_n, x_1 + 1, \dots, x_n + 1$ , sabiendo que  $x_1 > \cdots > x_n$  y  $x_1 + 1 > \cdots > x_n + 1$ . Para cada orden posible, reemplacemos cada  $x_i$  por un  $-1$  y cada  $x_i + 1$  por un  $1$ . Por ejemplo, el orden  $x_1 + 1 > x_2 + 1 > x_1 > x_3 + 1 > x_2 > x_4 + 1 > x_3 > x_4$  se convierte en la sucesión  $(1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1)$ . Es claro que el resultado es una sucesión de votación, y cada sucesión de votación corresponde a una subregión. Además, uno puede verificar que la región es acotada cuando todas las sumas parciales  $b_1 + \cdots + b_j$  con  $1 \leq j \leq 2n - 1$  son positivas. También es fácil ver que hay exactamente  $C_{n-1}$  sucesiones con esa propiedad. Por lo tanto la región  $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$  de  $\mathcal{B}_n$  contiene  $C_n$  regiones de  $C_n$ , de las cuales  $C_{n-1}$  son acotadas. El resultado se sigue. □

## 5.4. Arreglo de Shi

**Definición 5.12.** El arreglo de Shi  $\mathcal{S}_n$  en  $\mathbb{R}^n$  está formado por los hiperplanos

$$x_i - x_j = 0, \quad x_i - x_j = 1 \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

**Proposición 5.13.** El polinomio característico para  $\mathcal{S}_n$  es  $\chi_{\mathcal{S}_n}(t) = t(t - n)^{n-1}$ .

*Demostración.* Nuevamente vamos a usar el método de campos finitos; contemos los puntos de  $\mathbb{F}_q^n$  que no satisfacen ninguna de las ecuaciones del arreglo de Shi. Representemos a cada uno de esos puntos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  por una  $q$ -tupla  $x^{-1} = (y_0, \dots, y_{q-1})$  de números y símbolos  $\circ$ , donde  $y_i = \circ$  si no existe ningún  $j \in [n]$  tal que  $x_j = i$ , y  $y_i = j$  si  $j$  es el elemento de  $[n]$  tal que  $x_j = i$ . Tal elemento debe ser único ya que  $x$  no tiene valores repetidos. Por ejemplo, al punto  $x = (3, 2, 8, 1, 5, 7, 12, 11) \in \mathbb{F}_{13}^8$  le corresponde la 13-tupla  $x^{-1} = (\circ, 4, 2, 1, \circ, 5, \circ, 6, 3, \circ, \circ, 8, 7)$ . Observemos que cada sucesión de números entre dos  $\circ$  consecutivos es decreciente, ya que  $x_i - x_j \neq 1$  para  $i < j$ .

Podemos construir estas  $q$ -tuplas de una manera alternativa que nos permitirá contarlas fácilmente. Para hacerlo, pensamos en la  $q$ -tupla  $x^{-1}$  como un vector escrito alrededor de un círculo, reflejando la estructura cíclica del campo  $\mathbb{F}_q$  bajo adición. Primero dibujamos  $q - n$  símbolos indistinguibles  $\circ$ . Luego ubicamos un 1 entre cualesquiera dos de ellos, teniendo en cuenta que los símbolos  $\circ$  son indistinguibles por el momento. Luego ubicamos cada uno de los números  $2, \dots, n$  en alguno de los  $q - n$  espacios entre dos  $\circ$  consecutivos; esto lo podemos hacer de  $(q - n)^{n-1}$  maneras. Si un espacio entre dos  $\circ$  consecutivos contiene varios números, los ubicamos en orden decreciente en el sentido de las manecillas del reloj. Esto determina el orden cíclico de los símbolos de la  $q$ -tupla. Por último, para determinar la  $q$ -tupla exactamente, necesitamos pasar del orden cíclico a un orden lineal, eligiendo la posición del 1 en la  $q$ -tupla; es decir, el valor de  $x_1$ . Esto nos da un total de  $q(q - n)^{n-1}$  posibilidades. Es fácil verificar que este procedimiento produce precisamente los puntos de  $\mathbb{F}_q^n$  que no están en ningún hiperplano del arreglo de Shi  $\mathcal{S}_n$ .  $\square$

**Corolario 5.14.** El arreglo  $\mathcal{S}_n$  tiene  $(n + 1)^{n-1}$  regiones, de las cuales  $(n - 1)^{n-1}$  son acotadas.

*Demostración.* Esta es una consecuencia inmediata de la Proposición 5.13 y el Teorema de Zaslavsky.  $\square$

El arreglo de Shi está cercanamente relacionado a ciertas listas de números conocidas como *funciones de parqueo*. Para explicar su definición, consideremos la siguiente situación:

En un parqueadero se tienen  $n$  espacios de estacionamiento ubicados en línea, numerados en orden de 1 a  $n$ , donde el espacio número 1 es el más cercano a la puerta de entrada del parqueadero, y el número  $n$  se encuentra llegando a la salida. Una fila de  $n$  autos se dispone a entrar al parqueadero. Cada uno de los conductores tiene un estacionamiento preferido que desea utilizar. Es posible representar todas las elecciones de los autos mediante una

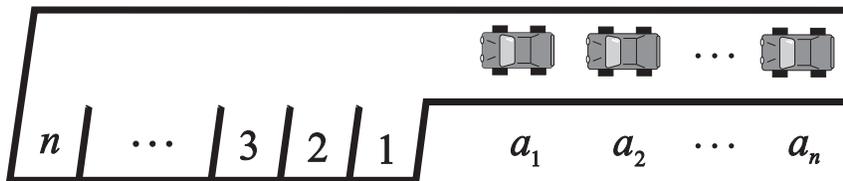


Figura 8: Funciones de parqueo.

lista de números  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , donde el auto  $i$  escoge el lugar  $a_i$ . Es posible que varios autos tengan el mismo espacio preferido; es decir, que  $a_i = a_j$  para  $i \neq j$ .

Una vez llegan los autos en orden, cada uno de ellos se dirige al sitio que escogió. Si el espacio está vacío, el auto se estaciona en ese lugar. En caso contrario, el auto sigue andando y se ubica en el primer lugar vacío que encuentre. Si ninguno de los lugares siguientes está libre, el auto no podrá estacionarse.

**Definición 5.15.** Una *función de parqueo* de longitud  $n$  es una lista  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de elecciones, para la cual todos los autos se pueden estacionar. El conjunto de todas las funciones de parqueo de longitud  $n$  se denotará por  $\mathcal{P}_n$ .

**Ejemplo 5.16.** Para  $n = 4$ , la lista  $(2, 1, 4, 1)$  es una función de parqueo. En tal caso, los primeros tres autos se estacionan en su lugar preferido, y el último auto se estaciona en la tercera posición. Por otro lado, la lista  $(3, 1, 4, 3)$  no es una función de parqueo, pues el último auto no podrá parquear.

Konheim y Weiss [4] demostraron los siguientes teoremas:

**Teorema 5.17.** Una sucesión  $(a_1, \dots, a_n)$  de enteros con  $1 \leq a_i \leq n$  es una función de parqueo si y sólo si contiene al menos un 1, al menos dos números menores o iguales a 2, y en general, al menos  $k$  números menores o iguales a  $k$ , para cada  $k$  entre 1 y  $n$ .

**Teorema 5.18.** Existen en total  $(n + 1)^{n-1}$  funciones de parqueo de longitud  $n$ .

Es posible demostrar el Teorema 5.18 por medio de los arreglos de hiperplanos, gracias a la cercana relación entre las funciones de parqueo y el arreglo de Shi. Teniendo en cuenta el Teorema 5.14, es suficiente dar una biyección entre las funciones de parqueo de longitud  $n$  y las regiones del arreglo de Shi  $\mathcal{S}_n$ . A continuación vamos a describir una biyección  $\lambda$ . La Figura 9 ilustra esta biyección para  $n = 3$ .

Para definir la biyección  $\lambda$ , comenzaremos por llamar  $R_0$  a la “región base”, en la cual  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_1 + 1 < x_2 + 1 < \dots < x_n + 1$ . Dadas dos regiones  $R$  y  $R'$ , definimos la *distancia*  $d(R, R')$  como el número de hiperplanos  $H$  del arreglo tales que  $R$  y  $R'$  se encuentran a lados opuestos de  $H$ ; es decir, el número de hiperplanos que debemos cruzar para llegar de  $R$  a  $R'$ . Construimos entonces la función  $\lambda(R)$  recursivamente en función de  $d(R_0, R)$  de la siguiente manera:

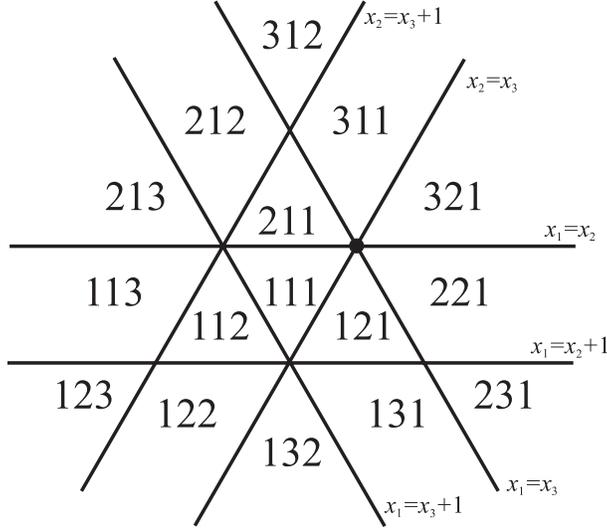


Figura 9: El arreglo de Shi  $\mathcal{S}_3$  y las etiquetas de sus regiones. El punto marcado es el origen.

1.  $\lambda(R_0) = (1, 1, \dots, 1) \in \mathcal{P}_n$ .
2. Si  $R$  y  $R'$  son regiones adyacentes, separadas únicamente por el hiperplano  $x_i - x_j = 0$ , y  $d(R_0, R') = d(R_0, R) + 1$ , definimos  $\lambda(R') = \lambda(R) + e_i$ , donde  $e_i$  es el vector con sólo un 1 en la  $i$ -ésima coordenada.
3. Si  $R$  y  $R'$  son regiones adyacentes, separadas únicamente por el hiperplano  $x_i - x_j = 1$ , y  $d(R_0, R') = d(R_0, R) + 1$ , definimos  $\lambda(R') = \lambda(R) + e_j$ .

Es fácil ver que la función  $\lambda$  está bien definida. También es cierto (pero no tan fácil) que es una biyección entre las regiones de  $\mathcal{S}_n$  y las funciones de parqueo de longitud  $n$ .

La construcción de esta biyección  $\lambda$  es debida a Igor Pak, y puede ser extendida a las  $k$ -funciones de parqueo, que están relacionadas con los arreglos de  $k$ -Shi  $\mathcal{S}_n^k$ . No entraremos en detalle al respecto, pero la demostración de la biyección de Pak y su generalización a los arreglos de  $k$ -Shi puede encontrarse en [16].

El número  $(n+1)^{n-1}$  juega un papel importante en varios contextos combinatorios. Tal vez el más importante es que cuenta el número de árboles numerados  $0, \dots, n$ . Una *inversión* en un árbol es un par de vértices  $i, j$  con  $1 \leq i < j \leq n$  tal que  $j$  se encuentra en el camino de  $i$  hasta 0. Kreweras [5] construyó una biyección entre las funciones de parqueo y los árboles numerados que demuestra el siguiente resultado:

**Teorema 5.19** (Kreweras, [5]). *El número de regiones del arreglo de Shi  $\mathcal{S}_n$  que se encuentran a una distancia  $k$  de la región base  $R_0$  es igual al número de árboles con vértices  $0, 1, \dots, n$  que tienen  $\binom{n}{2} - k$  inversiones.*

## 5.5. Arreglo de Linial

El siguiente arreglo es parecido a los anteriores, aunque el cálculo de su polinomio característico y su número de regiones, debidos a Alex Postnikov [9], es más sutil.

**Definición 5.20.** El arreglo de Linial  $\mathcal{L}_n$  en  $\mathbb{R}^n$  está formado por los hiperplanos

$$x_i - x_j = 1 \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

**Teorema 5.21.** [9] *El polinomio característico del arreglo de Linial  $\mathcal{L}_n$  es*

$$\chi_{\mathcal{L}_n}(t) = \frac{t}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (t-k)^{n-1}.$$

Un *árbol alternante* es un árbol cuyos vértices están numerados  $1, 2, \dots, n$  de manera que todo vértice es o bien mayor que todos sus vecinos o bien menor que todos ellos.

**Teorema 5.22.** [9] *El número de regiones del arreglo de Linial  $\mathcal{L}_n$  es igual al número de árboles alternantes con  $n+1$  vértices, y está dado por la fórmula*

$$r(\mathcal{L}_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k+1)^{n-1}.$$

Se conocen varias familias de objetos que están en biyección con los árboles alternantes. Sin embargo, aún no se conoce una biyección natural entre las regiones de  $\mathcal{L}_n$  y los árboles alternantes. Tampoco se conoce una interpretación de las regiones acotadas del arreglo de Linial, en términos de árboles alternantes u otros objetos combinatorios. También sería interesante encontrar una interpretación combinatoria para los coeficientes del polinomio  $\chi_{\mathcal{L}_n}(t)$ . Culminamos esta sección con un resultado muy sorprendente, la “hipótesis de Riemann para el arreglo de Linial”:

**Teorema 5.23.** [9] *Todas las raíces del polinomio  $\frac{\chi_{\mathcal{L}_n}(t)}{t}$  tienen parte real igual a  $\frac{n}{2}$ ; es decir, son de la forma  $\frac{n}{2} + bi$  con  $b \in \mathbb{R}$ .*

## 6. Arreglos complejos y el álgebra de Orlik-Solomon

En esta sección consideramos los arreglos de hiperplanos sobre el campo  $\mathbb{C}$  de los números complejos. Los complejos no forman un campo ordenado, por lo cual un hiperplano en  $\mathbb{C}^d$  no tiene un lado ‘positivo’ y otro ‘negativo’. Por el contrario, el complemento de un hiperplano es un espacio conexo. Por lo tanto no es posible definir regiones como lo hicimos sobre los reales. Ahora la topología del complemento  $\mathbb{C}^d - \mathcal{A}$  del arreglo es más complicada, pero aún

guarda una estrecha relación con el poset de intersección y el polinomio característico, que se pueden definir igual que antes.

Sea  $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$  un arreglo de hiperplanos en  $\mathbb{C}^d$ . Sea  $E(\mathcal{A})$  el álgebra asociativa sobre  $\mathbb{C}$  generada por los hiperplanos (considerados como símbolos formales), sujeta únicamente a las relaciones  $H_i^2 = 0$  para  $1 \leq i \leq n$  y  $H_i H_j = -H_j H_i$  para  $1 \leq i < j \leq n$ . Es claro que  $\{\prod_{H \in \mathcal{B}} H : \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$  es una base de  $E(\mathcal{A})$  como espacio vectorial, y por lo tanto  $\dim(E(\mathcal{A})) = 2^n$ . (Algunos lectores reconocerán a  $E(\mathcal{A})$  como el álgebra exterior de un espacio vectorial de dimensión  $n$ .)

Definimos la función lineal  $\partial : E(\mathcal{A}) \rightarrow E(\mathcal{A})$  de la siguiente manera:

$$\partial(H_{i_1} H_{i_2} \cdots H_{i_k}) = \sum_{j=1}^k (-1)^j H_{i_1} \cdots \widehat{H_{i_j}} \cdots H_{i_k}$$

donde  $\widehat{H_{i_j}}$  significa que omitimos el término  $H_{i_j}$ . Decimos que  $H_{i_1}, \dots, H_{i_k}$  son *dependientes* si sus vectores normales lo son; es decir, si  $\dim(H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k}) > d - k$ .

Sea  $I_{\mathcal{A}}$  el ideal de  $E(\mathcal{A})$  generado por

- Los productos  $H_{i_1} H_{i_2} \cdots H_{i_k}$  tales que  $H_{i_1} \cap H_{i_2} \cap \cdots \cap H_{i_k} = \emptyset$ , y
- Los elementos  $\partial(H_{i_1} H_{i_2} \cdots H_{i_k})$  tales que  $H_{i_1}, \dots, H_{i_k}$  son dependientes.

**Definición 6.1.** [7] El *álgebra de Orlik-Solomon* del arreglo  $\mathcal{A}$  es  $OS(\mathcal{A}) = E(\mathcal{A})/I_{\mathcal{A}}$ .

Podemos considerar a  $E(\mathcal{A}) = E(\mathcal{A})_0 \oplus E(\mathcal{A})_1 \oplus \cdots \oplus E(\mathcal{A})_n$  como un espacio vectorial graduado donde la componente  $E(\mathcal{A})_k$  de grado  $k$  es generada por los productos  $H_{i_1} \cdots H_{i_k}$  de grado  $k$ . Como  $I_{\mathcal{A}}$  es un ideal homogéneo, el cociente  $OS(\mathcal{A}) = OS(\mathcal{A})_0 \oplus \cdots \oplus OS(\mathcal{A})_n$  también es graduado.

**Definición 6.2.** El *polinomio de Hilbert* de  $OS(\mathcal{A})$  se define como

$$\text{Hilb}_{OS(\mathcal{A})} = \sum_{k=0}^n (\dim(OS(\mathcal{A})_k)) x^k.$$

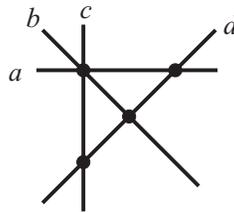


Figura 10: Arreglo en  $\mathbb{R}^2$

**Ejemplo 6.3.** Sea  $\mathcal{A}$  el arreglo en  $\mathbb{C}^2$  cuyos hiperplanos son  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 0$ , y  $x - y = 1$ . En la Figura 10 ilustramos la parte real de este arreglo. El lector puede calcular fácilmente el poset de intersección (que es igual si consideramos el arreglo en  $\mathbb{C}^2$  o en  $\mathbb{R}^2$ ), la función de Möbius, y el polinomio característico de  $\mathcal{A}$ , que es  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 4t + 5$ .

Ahora,  $E(\mathcal{A})$  es generado por variables no conmutativas  $a, b, c, d$  sujetas a las relaciones

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 0, \quad ab = -ba, ac = -ca, \dots, cd = -dc.$$

El álgebra de Orlik-Solomon  $OS(\mathcal{A})$  se obtiene al introducir las relaciones adicionales

$$abd = acd = bcd = 0, \quad -bc + ac - ab = 0.$$

De ahí vemos que la siguiente es una base para  $OS(\mathcal{A})$  como espacio vectorial:

$$\{1, a, b, c, d, ab, ac, ad, bd, cd\}.$$

No incluimos al monomio  $bc$  en la base porque  $bc = ac - ab$ . Tampoco incluimos a  $abc$  porque en  $OS(\mathcal{A})$  se tiene que  $abc = a(ac - ab) = a^2(c - b) = 0$ . Tenemos entonces que

$$\text{Hilb}_{OS(\mathcal{A})}(x) = 1 + 4x + 5x^2.$$

Algunos lectores reconocerán alguna semejanza entre la Definición 6.1 y algunas construcciones en la topología algebraica. De hecho, la gran importancia del álgebra de Orlik-Solomon se debe a los siguientes elegantísimos resultados:

**Teorema 6.4.** [7] *La cohomología de de Rham de  $\mathbb{C}^d - \mathcal{A}$  es isomorfa al álgebra de Orlik-Solomon de  $\mathcal{A}$ :*

$$H_{DR}^*(\mathbb{C}^d - \mathcal{A}, \mathbb{C}) \cong OS(\mathcal{A}).$$

**Teorema 6.5.** [7] *El polinomio de Hilbert de  $OS(\mathcal{A})$  es*

$$\text{Hilb}_{OS(\mathcal{A})}(x) = x^d \chi_{\mathcal{A}}(-1/x);$$

*es decir, el  $i$ -ésimo número de Betti de  $\mathbb{C}^d - \mathcal{A}$  es igual al valor absoluto del  $(d - i)$ -ésimo coeficiente del polinomio característico de  $\mathcal{A}$ .*

No daremos una definición precisa de la cohomología de de Rham y los números de Betti en estas notas, cuyo enfoque es combinatorio. Para ver una descripción completa, referimos al lector a [2], o a [8] para una presentación desde el punto de vista de los arreglos de hiperplanos. Nos limitaremos a mencionar que, como dijimos anteriormente, **en un espacio real**  $\mathbb{R}^d$ , el complemento de un arreglo  $\mathcal{A}$  es una unión disjunta de regiones contráctiles. Topológicamente es un espacio bastante trivial. Su única característica interesante es el número de regiones  $r(\mathcal{A})$ , que ya sabemos calcular combinatoriamente. Por el contrario, **en un espacio complejo**  $\mathbb{C}^d$ , la topología del complemento  $\mathbb{C}^d - \mathcal{A}$  es más interesante. Por ejemplo, vemos que este es un espacio conexo, ya que podemos dar una vuelta alrededor

de cada hiperplano. La cohomología del complemento es un anillo graduado que “mide” de cierta manera la topología de este espacio. El  $i$ -ésimo número de Betti  $\beta_i = \dim H_{DR}^i(\mathbb{C}^d - \mathcal{A}, \mathbb{C})$  nos dice cuántos huecos  $i$ -dimensionales independientes tiene este espacio. Es de gran interés que Orlik y Solomon hayan logrado dar una presentación puramente combinatoria de la cohomología de este espacio y su polinomio de Hilbert.

En resumen, el polinomio característico  $\chi_{\mathcal{A}}(x)$  de un arreglo de hiperplanos  $\mathcal{A}$  es un poderoso invariante combinatorio, que contiene una gran cantidad de información sobre el arreglo:

- Si el arreglo está en  $\mathbb{R}^n$ , el complemento  $\mathbb{R}^n - \mathcal{A}$  es una unión de  $|\chi_{\mathcal{A}}(-1)|$  componentes conexas, y  $|\chi_{\mathcal{A}}(1)|$  de estas regiones son acotadas.
- Si el arreglo está en  $\mathbb{F}_q^n$ , el complemento  $\mathbb{F}_q^n - \mathcal{A}$  tiene exactamente  $\chi_{\mathcal{A}}(q)$  puntos.
- Si el arreglo está en  $\mathbb{C}^n$ , los números de Betti del complemento  $\mathbb{C}^n - \mathcal{A}$  son precisamente los coeficientes de  $\chi_{\mathcal{A}}(q)$ .

Éste es tan sólo el comienzo de la teoría de arreglos de hiperplanos. Invitamos al lector a seguir profundizando en esta fascinante área.

## Agradecimientos.

Agradecemos muy especialmente a Richard Stanley, de quien aprendimos la teoría combinatoria de arreglos de hiperplanos. A esto se debe que esta lección, escrita originalmente en 2003, tiene bastante en común con sus notas [15] de 2005.

## Referencias

- [1] C. A. Athanasiadis. Characteristic polynomials of subspace arrangements and finite fields, *Advances in Math.* **122** (1996), 193-233.
- [2] R. Bott y L. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*, Berlin, New York: Springer-Verlag. 1982.
- [3] H. Crapo y G.-C. Rota. *On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries*. MIT Press, Cambridge, MA, 1970.
- [4] A. G. Konheim y B. Weiss, An occupancy discipline and applications. *SIAM J. Applied Math.* **14** (1966) 1266-1274.
- [5] G. Kreweras, *Une famille de polynômes ayant plusieurs propriétés énumératives*, *Periodica Mathematica Hungarica* Vol 11(4), 1980.

- [6] E. León, *Conteos en Arreglos de Hiperplanos, Números de Catalan y Funciones de parqueo*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, trabajo de grado, 2006.
- [7] P. Orlik y L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Invent. Math.* **56** (1980) 167-189.
- [8] P. Orlik y H. Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [9] A. Postnikov y R. Stanley, *Deformation of Coxeter Hyperplane Arrangements* Massachusetts Institute of technology, Cambridge, MA 02139, 1997.
- [10] G. C. Rota. *On the Foundations of Combinatorial Theory I: Theory of Möbius Functions*. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, **2** (1964) 340-368.
- [11] A. Sokal. Bounds on the Complex Zeros of (Di)Chromatic Polynomials and Potts-Model Partition Functions. *Combin. Probab. Comput.* **10** (2001) 41-77.
- [12] A. D. Sokal, Chromatic roots are dense in the whole complex plane. *Combin. Probab. Comput.* **13** (2004), 221-261.
- [13] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol 1*. Wadsworth & Brooks Cole, Belmont, CA, 1986.
- [14] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol 2*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [15] R. Stanley, *An Introduction to Hyperplane Arrangements*. IAS/ Park City Mathematics Series, 2005.
- [16] R. Stanley. *Hyperplane arrangements, parking functions, and tree inversions*, in *Mathematical Essays in Honor of Gian-Carlo Rota* (B. Sagan and R. Stanley, eds.) Birkhäuser, Boston/Basel/Berlin, 1998, pp. 259-375.
- [17] R. Stanley, *Hyperplane arrangements, interval orders, and trees*. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **93** (1996), 2620-2625.
- [18] T. Zaslavsky, *Facing up to Arrangements: Face-Count Formulas for Partitions of Space by Hyperplanes*, Thesis (MIT, 1974) and *Mem. Amer. Math. Soc.*, No. 154, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.