Tres lecciones en combinatoria algebraica.

II. Las funciones simétricas y la teoría de representaciones.

Federico Ardila* Emerson León**
Mercedes Rosas*** Mark Skandera****

3 de enero de 2013

Resumen

En esta serie de tres artículos, damos una exposición de varios resultados y problemas abiertos en tres áreas de la combinatoria algebraica y geométrica: las matrices totalmente no negativas, las representaciones del grupo simétrico S_n, y los arreglos de hiperplanos. Esta segunda parte trata la conección entre las funciones simétricas y la teoría de representaciones.

En la primavera del 2003, la Universidad de los Andes (Bogotá, Colombia) nos invitó a dar un ciclo de conferencias sobre la combinatoria algebraica. Fue una ocasión inolvidable, tanto por el placer de trabajar con sus estudiantes, excepcionalmenete brillantes y motivados, como por la belleza de su campus y la hospitalidad de su gente.

En esta segunda lección hablaremos sobre nuestra introducción a la teoría de representaciones del grupo simétrico, del grupo lineal general, y a la teoría de las funciones simétricas. Esperamos que este trabajo haga justicia a la experiencia vivida en esos días.

1. Algunas nociones básicas.

Empezamos por introducir algunas nociones básicas de combinatoria algebraica. Una sucesión debilmente decreciente de enteros no negativos se denomina *partición* y se escribe

*San Francisco State University, San Francisco, CA, USA y Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia, federico@sfsu.edu – financiado por la CAREER Award DMS-0956178 y la beca DMS-0801075 de la National Science Foundation de los Estados Unidos, y por la SFSU-Colombia Combinatorics Initiative.

**Freie Universität Berlin, Alemania, emerson@zedat.fu-berlin.de -financiado por el Berlin Mathematical School.

***Universidad de Sevilla, España, mrosas@us.es – financiada por los proyectos MTM2007–64509 del Ministerio de Ciencias e Innovación de España y FQM333 de la Junta de Andalucia.

****Lehigh University, Bethlehem, PA, USA, mas906@math.lehigh.edu – financiado por la beca H98230-11-1-0192 de la National Security Agency de los Estados Unidos.

como $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Un ejemplo de partición es la siguiente $\lambda = (7, 7, 4, 1, 1, 1, 0, 0)$ Aquellos λ_i mayores que cero se llaman las *partes* de λ, y decimos que dos particiones son iguales si difieren solamente en el número de ceros.

El número de partes de λ se denomina la longitud de λ y se denota por $\ell(\lambda)$. En ocasiones escribimos la partición λ describiendo la multiplicidad de sus partes. Por ejemplo, para nuestro ejemplo, escribimos $\lambda = (1^3\,4\,7^2)$.

Decimos que λ es una *partición de n* si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{\ell(\lambda)} = n,$. En este caso, escribimos $\lambda \vdash n$, o $|\lambda| = n$. Identificamos una partición de n con su *diagrama de Young*, un arreglo de filas de cuadrados, justificados por la derecha, donde la i-ésima fila contiene λ_i cuadrados, tal y como se ilustra en la Figura 1. La *partición transpuesta* de λ se define a través de su diagrama de Young, que se obtiene al reflejar el diagrama de λ sobre su diagonal principal. Se denota por λ'.

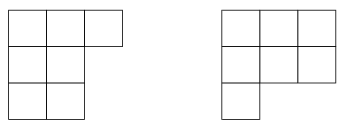

Figura 1: Los diagramas de Young de la partición $\lambda = (3, 2, 2)$ y de su transpuesta $\lambda' = (3, 3, 1)$.

Similarmente, dadas dos particiones μ y λ, cuyos diagramas de Young satisfacen que $\mu \subseteq \lambda$, definimos el tablero de Young sesgado, λ/μ como aquel que se obtiene al restar al diagrama de λ el diagrama de μ (vistos como conjuntos).

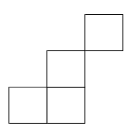

Figura 2: El diagrama de Young sesgado correspondiente a $(3, 2, 2)/(2, 1)$.

Sea λ una partición de n, un *tableau* es una manera de asignar un número en $\mathbb{N}$ a cada celda del diagrama de λ, donde es posible utilizar el mismo número repetidamente. En algunas ocasiones, es conveniente pedir que todas las entradas utilizadas pertenezcan a $[n]$ para algún n, donde $[n]$ denota al conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Un tableau es *semi-estándar* si sus columnas crecen estrictamente, mientras que sus filas crecen débilmente. La sucesión

$$(\alpha_1(T), \alpha_2(T), \cdots, \alpha_{n_\ell}(T))$$

donde $\alpha_i(T)$ es número de veces que aparece el número i en el tableau T se denomina el *contenido* de T. Un tableau semi-estándar es *estándar* si cada uno de los números en $[n]$ aparece exactamente una vez.

Sea T un tableau de forma λ. El *peso* de T, que denotamos por x^T se define como

$$x^T = x_1^{\alpha_1(T)} x_2^{\alpha_2(T)} \dots$$

El *coeficiente de Kostka* $K_{\lambda,\mu}$ se define como el número de tableaux semi-estándar de forma λ y contenido μ. En particular, denotamos por f^λ al número de tableaux estándar de forma λ. Esto es, $f^\lambda = K_{\lambda,(1^n)}$.

1	1	2
2	3	

1	1	3
2	2	

Figura 3: Los dos tableaux semi-estándar de forma $(3, 2)$ y contenido $(2, 2, 1)$. Ambos tienen peso $x_1^2 x_2^2 x_3$.

Sean μ y ν dos particiones del mismo entero. Definimos al *orden de dominancia*, denotados por $\trianglerighteq$, diciendo que $\mu \trianglerighteq \nu$ si para cada k tenemos que

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$$

En física, este orden se conoce como *mayorización*.

Ejercicio 1.1 (Los coeficientes de Kostka y el orden de dominancia)**.** Supóngase que μ y λ son particiones de un mismo entero y que $K_{\lambda,\mu} \neq 0$. Demuéstrese que $\lambda \trianglerighteq \mu$ en el orden de dominancia. Demuéstrese, además, que $K_{\lambda,\lambda} = 1$.

Trabajaremos siempre sobre el cuerpo de los números complejos. Recordemos que el *grupo simétrico* $\mathbb{S}_n$ se define como el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $[n]$, junto con la operación de composición. A los elementos del grupo simétrico los denominamos permutaciones. Denotamos por $\pi\sigma$ la permutación obtenida al aplicar primero σ y luego π a los elementos de $[n]$. A la permutación identidad la denotamos con la letra ϵ.

Utilizamos dos maneras diferentes para denotar permutaciones. De acuerdo con la primera convención, la permutación π que envía el número i en $\pi(i)$ la denotamos con la palabra $\pi(1)\,\pi(2)\,\cdots\pi(n)$. De acuerdo a la segunda, escribimos π como el producto de sus ciclos. Por ejemplo, la permutación π definida por $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 3$, $\pi(3) = 7$, $\pi(4) = 4$, $\pi(5) = 1$, $\pi(6) = 8$, $\pi(7) = 5$, $\pi(8) = 6$ se escribe, utilizando la primera convención, por la palabra $2\,3\,7\,4\,1\,8\,5\,6$. Su descomposición en ciclos es: $(1\,2\,3\,7\,5)(4)(6\,8)$. El *tipo* de una permutación es la partición definida por las longitudes de los ciclos que aparecen en ella. La permutación π que aparece en nuestro ejemplo tiene tipo $521 \vdash 8$.

A cada partición λ le asociamos el entero z_λ definido como

$$z_\lambda = 1^{m_1} m_1!\, 2^{m_2} m_2! \,\cdots n^{m_n} m_n!.$$

Ejercicio 1.2. Demostrar que dos permutaciones son conjugadas si y sólo si tienen el mismo tipo. Más aún, demostrar que el número de permutaciones de $\mathbb{S}_n$ cuyo tipo es la partición $\lambda = 1^{m_1}\, 2^{m_2} \,\cdots n^{m_n}$ de n es igual a $\frac{n!}{z_\lambda}$.

2. Introducción a la teoría de representaciones de grupos.

Comenzamos con una breve exposición de la teoría general de representaciones de grupos, centrándonos en el caso del grupo simétrico y basada en los trabajos de François Bergeron [2], William Fulton [3] y Bruce Sagan [7].

Sea G un grupo, una *representación (matricial, compleja) de* G es un homomorfismo de grupos entre G y el grupo de las matrices invertibles de orden dado, $GL_d = GL_d(\mathbb{C})$. Esto es,

$$\begin{aligned} X : G &\to GL_d \\ \pi &\mapsto X(\pi). \end{aligned}$$

Al parámetro d lo llamamos *orden o dimensión* de la representación. Dada una representación matricial X, denotamos $X(\pi)\vec{v}$ por $\pi \cdot \vec{v}$. En esta situación decimos que G *actúa (linealmente)* sobre $\mathbb{C}^d$.

Consideramos ahora dos acciones del grupo simétrico sobre $[m]^n$:

$$\begin{aligned} &\sigma \cdot (v_1, v_2, \cdots, v_n) = (\sigma(v_1), \sigma(v_2), \cdots, \sigma(v_n)), && \sigma \in \mathbb{S}_m \text{ permuta las entradas de } v. \\ &(v_1, v_2, \cdots, v_n) \cdot \tau = (v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, \cdots, v_{\tau(n)}), && \tau \in \mathbb{S}_n \text{ permuta las posiciones en } v. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1. Demostrar que las dos definiciones que acabamos de dar son, efectivamente, acciones de $\mathbb{S}_m$ (respectivamente $\mathbb{S}_n$) sobre $[m]^n$. Por otra parte, verificar que si definimos $\tau \cdot (v_1, v_2, \cdots, v_n) = (v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, \cdots, v_{\tau(n)})$, no obtenemos una acción de $\mathbb{S}_n$ sobre $[m]^n$ ya que no proviene de un homomorfismo de grupos.

Dos ejemplos de representaciones del grupo simétrico son la *representación trivial*, que se obtiene al enviar todos los elementos de $\mathbb{S}_n$ a la matriz identidad, y la *representación alternante* definida por $X(\pi) = (\mathrm{sgn}(\pi))$. Ambas representaciones tienen orden uno.

Otras dos representaciones del grupo simétrico particularmente importantes son la *representación definición*, obtenida al hacer actuar $\mathbb{S}_n$ sobre el conjunto $[n]$ de la manera canónica (utilizando como base a los elementos de $[n]$), y la *representación regular*, que proviene de hacer actuar un grupo finito G sobre sí mismo (utilizando como base a los elementos de G).

Un *homomorfismo de representaciones* es una transformación lineal $Y : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^d$ tal que $Y(gv) = gY(v)$ para todo $g \in G$ y $v \in \mathbb{C}^m$. Si Y es invertible tenemos entonces un *isomorfismo.*

Ejercicio 2.2 (La representación definición de $\mathbb{S}_3$.)**.** Demuestre que si hacemos actuar $\mathbb{S}_3$ sobre $\mathbb{C}^3$ permutando los vectores de la base canónica obtenemos la siguiente representación matricial

$$X(1\,2\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X(2\,1\,3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X(3\,2\,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$X(1\,3\,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X(2\,3\,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X(3\,1\,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcule las matrices correspondientes a la representación definición de $\mathbb{S}_4$ sobre $\mathbb{C}^4$, y observe que, para cada n las matrices obtenidas mediante esta construcción son matrices ortogonales, y en consecuencia sus inversas vienen dadas por sus transpuestas.

En general, decimos que una representación de un grupo finito G es una *representación por permutaciones* cuando proviene de la acción de G sobre un conjunto finito permutando sus elementos. Esta acción nos proporciona un homomorfismo natural de G al grupo de las matrices de permutación, un interesante subgrupo de GL_d. Las matrices correspondientes a representaciones por permutaciones son matrices de permutaciones (matrices en las que cada fila y cada columna contiene exactamente una entrada diferente de cero e igual a uno). Tanto la representación definición como la representación regular son ejemplos de representaciones por permutaciones. Por otra parte, la representación alternante no lo es.

Las representaciones por permutaciones son particularmente interesantes desde un punto de vista combinatorio. Por ejemplo, la traza de $X(\pi)$ cuenta el número de elementos del conjunto que permanecen fijos bajo la acción de X. En particular, el orden (o dimensión) de una representación por permutaciones X viene dado por la traza de $X(\epsilon)$.

2.1. Los caracteres

El ejemplo con el que concluimos la sección anterior nos sugiere la importancia de considerar la traza de una representación, y nos pone en contacto con un invariante fundamental de cualquier representación de order finito de un grupo.

Definición 2.1 (Carácter)**.** Sea X una representación matricial de un grupo $X : G \to GL_d(\mathbb{C})$. El *carácter* de X es la función χ:

$$\begin{aligned} \chi : G &\to \mathbb{C} \\ \pi &\mapsto \operatorname{tr} X(\pi). \end{aligned}$$

donde $\operatorname{tr} X$ denota la traza de la matriz X.

El carácter de una representación no depende de la base utilizada para construir la matriz asociada a la transformación lineal. Por otra parte, no es necesario que el grupo sea finito para la definición de carácter.

Por ejemplo, el carácter de la representación definición de $\mathbb{S}_3$, se calcula rápidamente a partir de los resultados obtenidos en el ejercicio 2.2.

$$\begin{array}{lll} \chi_{def}(123) = 3 & \chi_{def}(213) = 1 & \chi_{def}(321) = 1 \\ \chi_{def}(132) = 1 & \chi_{def}(231) = 0 & \chi_{def}(312) = 0 \end{array}$$

Sabemos que la dimensión de la representación definición viene dada por el valor de su carácter en la identidad. Más generalmente, tenemos que $\chi_{def}(\sigma)$ cuenta el número de puntos fijos de σ.

Los caracteres juegan un rol fundamental en la teoría de representaciones de los grupos finitos. Esto se debe al siguiente resultado que nos dice que, no solamente son un invariante dentro de sus clases de isomorfismos, sino que nos permite distinguirlas.

Teorema 2.1. *Dos representaciones de un grupo finito G tienen el mismo carácter sí y sólo sí son isomorfas. Esto es, si X es una representación con carácter χ y Y es una representación con carácter ϕ,*

$$X \cong Y \text{ si y sólo si } \chi(g) = \phi(g) \text{ para cada } g \text{ en } G.$$

Pronto volveremos a la noción de carácter. Ahora nos planteamos el problema de descomponer una representación $X : G \to GL_d(\mathbb{C})$ como una suma directa de representaciones más sencillas. Empezamos por estudiar los subespacios de $\mathbb{C}^d$ que permanecen invariantes bajo G.

Definición 2.2 (Subespacio Invariante)**.** Un subespacio vectorial W de un espacio V es *invariante bajo G* si

$$\pi \cdot W = X(\pi)\, W = \{X(\pi)\,(w) : w \in W\} \subseteq W$$

para cada π en G.

Por ejemplo, el subespacio generado por $W = \vec{1}+\vec{2}+\vec{3}$ es invariante bajo la representación definición de $\mathbb{S}_3$.

El complemento ortogonal de un subespacio G-invariante W también es invariante, siempre y cuando el producto escalar que lo define sea invariante bajo G, es decir $\langle u, v \rangle = \langle g \cdot u, g \cdot v \rangle$ para todo $u, v \in V$ y $g \in G$. Para la representación definición de $\mathbb{S}_n$, el producto escalar canónico es invariante. (El que hace que los vectores de la base canónica sean ortonormales.) Tenemos entonces que el complemento ortogonal al subespacio $W = \vec{1}+\vec{2}+\vec{3}$ también es invariante por la representación definición de $\mathbb{S}_3$. Este espacio está generado por $\vec{2} - \vec{1}$, y $\vec{3} - \vec{1}$.

La representación definición de $\mathbb{S}_n$ actúa de manera trivial sobre el subespacio generado por $1 + 2 + \ldots + n$. La restricción de esta representación al complemento ortogonal de este subespacio lo denominamos la *representación estándar.* Tiene por base $\vec{2}-\vec{1}, \vec{3}-\vec{1}, \cdots, \vec{n}-\vec{1}$, y en consecuencia orden $n-1$.

Ejercicio 2.3 (La representación estándar de $\mathbb{S}_3$)**.** Demostrar que si escribimos la transformación lineal X definida en el Ejercicio 2.2 en la base $\{\vec{1}+\vec{2}+\vec{3},\ \vec{2}-\vec{1},\ \vec{3}-\vec{1},\ \}$ obtenemos la siguiente representación matricial:

$$X(1\,2\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X(2\,1\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$X(3\,2\,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad X(1\,3\,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$X(2\,3\,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad X(3\,1\,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Con respecto a esta segunda base, construida a partir de los subespacios invariantes de V, las matrices correspondientes a la representación X son de la forma

$$X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = A \oplus B.$$

dando una descomposición de X como la suma directa de dos representaciones irreducibles: $X = A \oplus B$. En este caso, A es la representación trivial y B es la representación estándar. En general, podemos descomponer una representación X de un grupo finito G como suma de dos representaciones siempre que exista un subespacio invariante no trivial. Para esto utilizamos el procedimiento que acabamos de ilustrar en la construcción de la representación estándar.

Definición 2.3 (Representación irreducible)**.** Sea G un grupo finito. Decimos que una representación de G en V es irreducible si V no tiene ningún subespacio invariante no trivial bajo la acción de X. (Los subespacios triviales de V son $\{0\}$ y V.)

La descomposición de la representación definición de $\mathbb{S}_3$ obtenida en el Ejercicio 2.3 es de hecho la mejor que se puede obtener. Las dos subrepresentaciones que aparecen son irreducibles. En el Ejercicio 2.8 veremos que la representación estándar es irreducible. Por otra parte, al ser unidimensional, es obvio que la representación trivial es irreducible.

Si una representación X de G tiene un subespacio no trivial, entonces su complemento ortogonal con respecto a este producto escalar invariante también es invariante y no trivial. La restricción de X a estos dos subespacios nos produce una descomposición más fina. Iterando este proceso, podemos escribir cualquier representación de G como suma directa de representaciones irreducibles.

Un resultado de Maschke nos asegura que cualquier representación compleja de un grupo finito puede escribirse como la suma directa de representaciones irreducibles. Esto se demuestra utilizando que para cualquier espacio vectorial complejo sobre el que actúa un grupo finito G, podemos construir un producto escalar invariante bajo esta acción a través del operador de Reynolds:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle g\cdot u, g\cdot v\rangle.$$

Por otra parte, si trabajamos con grupos infinitos este resultado no es necesariamente cierto. Un grupo que posee la propiedad de que todas sus representaciones pueden ser escritas como la suma directa de sus representaciones irreducibles se denomina *semi-simple.*

Ejercicio 2.4. Si $X : G \to GL(V)$ y $Y : G \to GL(W)$ son representaciones de un grupo finito G, demostrar que tanto $X \oplus Y$, como $X \otimes Y$ también lo son.

Demostrar que X induce una representación X^* sobre el espacio dual V^*. Si $F \in V^*$

$$X^*(g) = \ {}^t f(X(g)^{-1}) : V^* \to V^*$$

Demostrar que los especios $\wedge^k V$ y $Sym^k V$ heredan una estructura de representación de G de aquella de V.

Ejercicio 2.5. Si X y Y son representaciones de un grupo finito G, demostrar que

$$\begin{aligned}
\chi_{X\oplus Y} &= \chi_X + \chi_Y\\
\chi_{X\otimes Y} &= \chi_X \cdot \chi_Y\\
\chi_{V^*} &= \overline{\chi_V}\\
\chi_{\wedge^2 V}(g) &= \frac{1}{2}\left[\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)\right]
\end{aligned}$$

Queremos estudiar la estructura algebraica que poseen las representaciones de un grupo finito. Empezamos por definir un producto interno sobre el espacio de caracteres. Haremos un breve recuento de algunos hechos de naturaleza general para motivar la definición de un producto escalar en el espacio de carácteres. Primero observese que del isomorfismo natural entre $Hom(V, W) \cong V^* \otimes W$ deducimos que

$$Hom_G(V, W) = Hom(V, W)^G \cong (V^* \otimes W)^G$$

donde G actúa sobre $\phi \in Hom(V, W)$ como $g(\phi) = g \circ \phi \circ g^{-1}$. (Para entender esta definición basta dibujar el diagrama conmutativo correspondiente.)

Ahora dada cualquiera proyección π de G-módulo U sobre su espacio de invariantes U^G, la dimensión de U^G viene dada por

$$tr\,\pi = \frac{1}{|G|}\sum tr(g)$$

En el caso particular que nos concierne, la proyección de $V^* \otimes W$ sobre $(V^* \otimes W)^G$, tenemos que

$$tr\,\pi = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi_{V^*}(g)\chi_W(g) = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi_V(g^-1)\chi_W(g)$$

ya que si es fácil ver que su V y W son representaciones, entonces $\chi_{V\otimes W} = \chi_V\chi_W$. Más aún, en general $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$ y por ser G un grupo finito todos los autovalores son raíces de la unidad y $\bar{\chi}_V = \chi_V(g^{-1})$.

Concluimos que

$$\dim(Hom_G(V,W)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)\chi_W(g^{-1})$$

Definición 2.4 (Producto interno de caracteres)**.** Sean χ y ϕ los caracteres correspondientes a dos representaciones del grupo finito G. El producto interno entre χ y ϕ se define como:

$$\langle\chi,\phi\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\phi(g^{-1}) \tag{1}$$

Cuando el grupo G puede ser deducido del contexto, denotamos este producto interno por $\langle\chi,\phi\rangle$.

Ejercicio 2.6. Demostrar que los caracteres de las representaciones trivial y la representación estándar de $\mathbb{S}_3$ son ortonormales

Teorema 2.2 (Relaciones entre caracteres)**.** *Si X y Y son representaciones irreducibles de un grupo finito G con caracteres χ y ϕ, tenemos entonces que*

$$\langle\chi,\phi\rangle = \delta_{\chi,\phi}$$

donde δ denota la función delta de Kronecker.

Ejercicio 2.7 (Propiedades de los caracteres)**.** Utilizar el teorema anterior para demostrar que si X es una representación matricial de un grupo finito G con carácter χ tal que

$$X \cong m_1X^{(1)} \oplus m_2X^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_kX^{(k)}, \tag{2}$$

donde las $X^{(i)}$ son representaciones irreducibles no isomorfas dos a dos, con carácter χ_i. Se tiene entonces que

1. $\chi = m_1\chi_1 + m_2\chi_2 + \ldots + m_k\chi_k$.
2. $\langle\chi,\chi^{(j)}\rangle = m_j$ para cada j.
3. $\langle\chi,\chi\rangle = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_k^2$.

4. X es irreducible si y solamente si $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Ejercicio 2.8 (La representación estándar es irreducible)**.** Demuestrar que la representación estándar es irreducible.

Los enteros no-negativos m_i que aparecen en la ecuacion (1) se denominan *multiplicidades.* En esta situación decimos que la representación irreducible $X^{(i)}$ aparece con multiplicidad m_i en la representación X.

Definición 2.5 (El grupo de Grothendieck de G)**.** Sea G un grupo semi-simple. El *grupo de Grothendieck de G* es el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfía de representaciones irreducibles de G con la operación de suma directa.

Los dos ejemplos canónicos de grupos semi–simples son los grupos finitos, y el segundo protagonista de nuestras lecciones : el grupo lineal general.

2.2. Restricción e inducción de representaciones.

Sea H un subgrupo de G. Queremos obtener una representación de H a partir de una representación de G (y viceversa). En la primera situación, el procedimiento es trivial. Si X es una representación matricial de G con carácter χ, definimos *la restricción de X a H,* que denotamos por $X \downarrow_H^G$, como $X \downarrow_H^G (h) = X(h)$, para cada $h \in H$. Al carácter de la representación resultante lo denotamos por $\chi \downarrow_H^G$. Es importante mencionar que, incluso si X es una representación irreducible $X \downarrow_H^G$, en general, no lo es.

Construir una representación del grupo G a partir de una representación del subgrupo H es más sutil. Veamos primero que sucede en el caso de un grupo finito G. Consideremos una transversal $t_1, \ldots, t_k$ de H en G; esto es, una colección de elementos de G tales que el grupo G es la unión disjunta de las clases t_iH. (Si G es finito $k = |G|/|H|$ también lo es.)

Sea Y una representación matricial de H sobre el espacio vectorial V. Para cada t_i, consideramos una copia t_iV de V, a cuyos elementos llamamos t_iv, con $v \in V$. Entonces, el grupo G actúa de manera natural sobre $\oplus_i (t_iY)$: Para determinar $g(t_iv)$ (donde $g \in G$, $i \in [k]$, $t_iv \in t_iV$) hacemos los siguiente: Tenemos que $gt_i \in t_lH$ para un único valor de l; sea $gt_i = t_lh$. Entonces, para cada $t_iv \in t_iV$, definimos

$$g \cdot (t_iv) = t_l(h \cdot v) \in t_lV.$$

Se puede demostrar que la representación que resulta no depende de la transversal utilizada para su construcción. Si calculamos la matriz correspondiente, obtenemos la siguiente definición de *la inducción de H a G*

Definición 2.6 (Representación inducida)**.** Sea H un subgrupo de un grupo finito G y sea Y una representación matricial de H. La matriz correspondiente a la inducción de la representación Y de H a una representación de G se denota por $Y \uparrow_H^G$ y viene dada por la siguiente matriz por bloques:

$$\begin{pmatrix} Y(t_1^{-1}gt_1) & Y(t_1^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_1^{-1}gt_k) \\ Y(t_2^{-1}gt_1) & Y(t_2^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_2^{-1}gt_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y(t_k^{-1}gt_1) & Y(t_k^{-1}gt_2) & \dots & Y(t_k^{-1}gt_k) \end{pmatrix}$$

donde $Y(g)$ es cero cada vez que $g \notin H$.

Si χ es el carácter de Y, al carácter de la representación inducida $Y \uparrow_H^G$ lo denotamos por $\chi \uparrow_H^G$.

Ejercicio 2.9. Sea $G = \mathbb{S}_3$ y $H = \{\epsilon, (2,3)\}$, tenemos que $G = H \cup (1,2)H \cup (1,3)H$. Sea $Y = 1$ la representación trivial de H. Entonces $X = 1 \uparrow_H^G$ se calcular como sigue: Para construir la primera fila de $X(2\,1\,3)$ tenemos que

$$\begin{aligned} Y(\epsilon^{-1}(1,2)\epsilon) &= Y(1,2) = 0 && \text{ya que } (1,2) \notin H \\ Y(\epsilon^{-1}(1,2)(1,2)) &= Y(\epsilon) = 1 && \text{ya que } (1,2) \in H \\ Y(\epsilon^{-1}(1,3)\epsilon) &= Y(1,3,2) = 0 && \text{ya que } (1,3,2) \notin H \end{aligned}$$

Continuando de esta manera obtenemos que

$$X(2\,1\,3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule $X = 1 \uparrow_H^G$. Verificar que obtenemos a la representación definición de $\mathbb{S}_3$ (Comparar con el Ejercicio 2.1.) (Tomado de [7])

El ejemplo anterior nos ilustra que, a pesar de que la representación trivial es irreducible, $1 \uparrow_H^G$ no lo es en general.

Existe una elegante relación entre los procedimientos de inducción y restricción de representaciones.

Teorema 2.3 (Fórmula de reciprocidad de Frobenius)**.** *Sea H un subgrupo de un grupo finito G, y sean ϕ y χ carácteres de H y de G respectivamente. Tenemos entonces que*

$$\langle \phi \uparrow_H^G, \chi \rangle_G = \langle \phi, \chi \downarrow_H^G \rangle_H$$

2.3. G–módulos.

Hasta ahora, siempre hemos trabajados con un espacio vectorial V, junto con una de sus bases. Esto nos ha permitido, por ejemplo, asociarle a cada homomorfismo una matriz. Pero, como sucede con frecuencia, es más fácil y elegante trabajar con espacios vectoriales sin la necesidad de fijar una base de antemano. Para esto introducimos la noción de G–módulo.

Sea G un grupo (no necesariamente finito) y sea V un espacio vectorial. Decimos que V es un G-*módulo* si existe un homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$ de G al grupo de las transformaciones lineales invertibles del espacio vectorial V, $GL(V)$. Nótese que al fijar una base para V, cada uno de estos homomorfismo ρ nos define representación matricial de G. Similarmente, cada representación matricial de G nos produce un tal ρ. Las nociones de G-módulo y de representación matricial de G son equivalentes desde este punto de vista. Hablaremos de una representación cuando no queremos enfatizar si estamos trabajando con (o sin) una base.

Sean V y W dos G-módulos. Un G-*homomorfismo* es una transformación lineal $\theta : V \to W$ tal que $\theta(\pi v) = \pi\theta(v)$ para cada $\pi \in G$. Si θ es invertible, decimos entonces que es un G-isomorfismo. A lo largo de estas lecciones asumimos que todos los G-módulos con los que trabajaremos son de dimensión finita.

Denotamos por $\mathbb{C}[G]$ al álgebra del grupo G, es decir al álgebra definida por las combinaciones lineales de elementos de G, donde la multiplicación viene dada por el producto de G. Obsérvese que $\mathbb{C}[G]$ tiene naturalmente estructura de H-módulo, lo que nos permite tomar el siguiente producto tensorial $\mathbb{C}[H]$-módulos.

La inducción de representaciones se puede definir de manera concisa en el lenguaje de G-módulos. Sea H un subgrupo de G, y sea V un H-módulo, definimos

$$Ind_H^G V = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$$

Nótese que $\mathbb{C}[G]$ tiene una estructura natural de $\mathbb{C}[G]$ módulo (dada por la restricción), y que estamos tomando el producto tensorial de $\mathbb{C}[H]$–módulos.

Hemos obtenido entonces una representación de G a partir de la representación V de H ya que $Ind_H^G V$ tiene estructura de G–módulo. Dejamos los detalles de verificar que ambas definiciones coinciden al lector familiarizado con la teoría de módulos.

Teorema 2.4. *Sea G un grupo finito, y sea $\{V^{(i)} : i \in I\}$ una lista completa de clases de isomorfía de G–módulos. Si $\mathbb{C}[G]$ se descompone como $\oplus_{i\in I} m_i V^{(i)}$, tenemos entonces que*

1. *$m_i = \dim V^{(i)}$, para cada $i \in I$.*
2. *$\sum_{i\in I}(\dim V^{(i)})^2 = |G|$*
3. *El número de clases de conjugación de G es igual al número de representaciones irreducibles de G. (Esto es, a la cardinalidad de I.)*

Ejercicio 2.10. Utilice el teorema anterior para demostrar que el conjunto de representaciones dado por la representación trivial, la representación alternante, y la representación estándar es un conjunto completo de representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_3$.

2.4. Construcción de las representaciones del grupo lineal general a partir de las representaciones del grupo simétrico.

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión m. Una representación de $GL(E)$ se dice polinomial si la aplicación

$$X : GL(V) \to GL(W)$$

viene descrita por polinomios. Esto es, si después de escoger bases para V y W las N^2 funciones coordinadas son polinomios en las m^2 variables determinadas por las entradas de una matriz genérica en $GL(V)$. Similarmente, decimos que la representación es racional u holomórfica cuando están funciones lo son.

En este pequeño apartado procedemos a dar una construcción que nos permite asociar a cualquier representación del grupo simétrico, una representación polinomial del grupo lineal general. Los detalles se encuentran en el libro de William Fulton [3]. Recordemos que estamos trabajando sobre un espacio vectorial V, de dimensión m. El grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ actúa sobre $V^{\otimes n}$ por la derecha (es decir, permuta las posiciones)

$$\begin{aligned}
&V^{\otimes n} = V \otimes_{\mathbb{C}} V \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} V, \\
&(u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n) \cdot \sigma = u_{\sigma(1)} \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

para cada $u_i \in V$ y $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Esta acción le proporciona a $V^{\otimes n}$ la estructura e $\mathbb{S}_n$-módulo. Por otra parte, a cada representación M de $\mathbb{S}_n$ le asociamos el espacio vectorial

$$\mathbb{V}(M) = V^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]} M$$

En consecuencia tenemos que $\mathbb{V}(M)$, para cada $w \in V^{\otimes n}$, $v \in M$ y $\sigma \in \mathbb{S}_n$:

$$(w \cdot \sigma) \otimes v = w \otimes (\sigma \cdot v)$$

Como el grupo lineal general $GL(V)$ actúa a la izquierda en V, y como esta acción se puede extender diagonalmente a $V^{\otimes n}$ de la siguiente manera

$$g \cdot (u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_n) = g \cdot u_1 \otimes g \cdot u_2 \otimes \cdots \otimes g \cdot u_n.$$

$V^{\otimes n}$ también tiene la estructura de $GL(V)$–módulo. Es inmediato ver que ambas acciones conmutan, de manera que $GL(V)$ también actúa sobre $\mathbb{V}(M) : g \cdot (w \otimes v) = (g \cdot w) \otimes v$.

Concluimos entonces que tanto $\mathbb{V}(M)$ como $V^{\otimes n}$ tienen la estructura de $(GL(E), \mathbb{S}_n)$-módulo.

Veamos algunos ejemplos de esta construcción. Si M es la representación trivial de $\mathbb{S}_n$, entonces $\mathbb{V}(M)$ corresponde a las potencias simétricas de V: $\mathbb{V}(M) = Sym^n(V)$. Similarmente, si M es la representación alternante de $\mathbb{S}_n$, obtenemos entonces las potencias simétricas de V, $\mathbb{V}(M) = \bigwedge^n V$. Finalmente, si $M = \mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$ es la representación regular de $\mathbb{S}_n$, entonces $\mathbb{V}(M) = V^{\otimes n}$.

Esta construcción es functorial, dado cualquier homomorfismo $\phi : M \to N$ de $\mathbb{S}_n$–módulos, obtenemos un homomorfismo $\mathbb{V}(\phi) = \mathbb{V}(M) \to \mathbb{V}(N)$ de $GL(V)$–módulos. Una descomposición en suma directa $M = \oplus M_i$ de $\mathbb{S}_n$–módulos determina una descomposición de $GL(V)$-módulos $\mathbb{V}(M) = \oplus \mathbb{V}(M_i)$.

3. Dos familias de representaciones del grupo simétrico.

El teorema de Maschke nos dice que cualquier representación compleja del grupo simétrico puede ser descompuesta como suma directa de representaciones irreducibles. Equivalentemente, cualquier $\mathbb{S}_n$-módulo se puede escribir como suma de $\mathbb{S}_n$-módulos irreducibles. Las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$ ($\mathbb{S}_n$-módulos irreducibles) corresponden a las clases de conjugación del grupo simétrico $\mathbb{S}_n$, que a su vez, como vimos en el ejercicio 1.2, vienen indexadas por las particiones de n.

En esta sección veremos como varios objetos combinatorios (tableau de Young, tableau semiestándar, etc) aparecen de manera natural en el estudio de estas representaciones. Presentamos una elegante construcción de un conjunto completo de representaciones irreducibles del grupo simétrico basada en las notas de François Bergeron [2]. A partir de este conjunto de representaciones irreducibles complejas del grupo simétrico construiremos una familia completa de representaciones polinomiales complejas irreducibles del grupo lineal general ilustrando la dualidad que existe entre ambas teorías.

Comenzamos por definir una importante familia $\{\mathcal{H}^\lambda\}$ de representaciones por permutaciones de $\mathbb{S}_n$, indexadas por particiones de n. En general, las representaciones H^λ no son irreducibles. Sin embargo, tienen la siguiente propiedad : Al descomponer a $\mathcal{H}^\mu$ como suma de representaciones irreducibles, la representación S^μ aparece con multiplicidad uno, y sólo aquellas representaciones irreducibles S^λ indexadas por particiones $\lambda \trianglerighteq \mu$, en el orden de dominanción, aparecen con multiplicidad mayor o igual a uno.

Posteriormente, construiremos un conjunto de representaciones irreducibles del grupo simétrico. Concluimos esta sección con la descripción de la descomposición de las representaciones $\{\mathcal{H}^\lambda\}$ como suma directa de representaciones irreducibles.

Definición 3.1 (Tableau inyectivo)**.** Sean k y n dos números dados tales que $k \geq n$. Un *tableau inyectivo* t de forma $\lambda \vdash n$ es una función inyectiva t del conjunto de casillas del diagrama de λ al conjunto $[k]$, que denotamos por $t : \lambda \to [k]$. Equivalentemente, es una manera de asociar a cada casilla del diagrama de λ un número entre $1, 2, \cdots, k$, sin repetición.

Sea l una casilla del diagrama de λ, $t(l)$ la entrada correspondiente a λ y $f(l)$ la fila a la que pertenece l. Definimos el peso de un tableau inyectivo λ como

$$x^t = \prod_{l \in \lambda} x_{t(l)}^{f(l)-1}.$$

Es importante no confundir esta noción con la definición de peso de un tableau dada en la introducción.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 5 & 4 \\ \hline 7 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 10 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Figura 4: Un tableau inyectivo de forma $\lambda = (3,2,1)$ y peso de tableau inyectivo $x_1^0 x_5^0 x_4^0\, x_7^1 x_3^1\, x_{10}^2 = x_3 x_7 x_{10}^2$. Su estabilizador es $\mathbb{S}_{\{1,4,5\}} \times \mathbb{S}_{\{3,7\}} \times \mathbb{S}_{\{10\}}$.

Definición 3.2 (La acción del grupo simétrico sobre el conjunto de los tableaux)**.** El grupo simétrico $\mathbb{S}_k$ actúa sobre cualquier tableaux $t : \lambda \to [k]$ de la manera canónica:

$$\begin{gathered}\sigma \cdot t : \lambda \to [k] \\ \sigma \cdot t(c) = \sigma(t(c)).\end{gathered}$$

El estabilizador de esta acción sobre T es un *subgrupo de Young*, $\mathbb{S}_{F_1} \times \mathbb{S}_{F_2} \times \cdots \mathbb{S}_{F_\ell}$, donde $\mathbb{S}_{F_i}$ es el grupo de permutaciones de las entradas de la i-ésima fila de T.

Definición 3.3. Definimos la familia de $\mathbb{S}_n$-módulos indexados por particiones λ de n

$$\mathcal{H}^\lambda = \mathcal{L}[x^t : t \text{ es un tableau inyectivo de forma } \lambda \vdash n]$$

Nótese que los $\mathcal{H}^\lambda$ son representaciones permutación.

Por ejemplo, $\mathcal{H}^{(2,1)} = \mathcal{L}[x_3, x_2, x_1]$ ya que

$$x^{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}} = x^{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}} = x_3,$$

$$x^{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}} = x^{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}} = x_2,$$

$$x^{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}} = x^{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}} = x_1.$$

Como vemos en este ejemplo, en general varios tableaux inyectivos tienen el mismo peso. Para evitar esta redundancia, añadimos la condición adicional de que las entradas en cada fila se encuentren ordenadas en orden creciente.

Ejercicio 3.1 (Las representaciones $\mathcal{H}^\lambda$ son cíclicas)**.** Demostrar que para cada λ fijo

$$\mathcal{H}^\lambda = \mathcal{L}[\sigma \cdot x^{t(\lambda)} : \sigma \in \mathbb{S}_n].$$

donde $t(\lambda)$ es el tableau inyectivo canónico que se obtiene al rellenar las entradas de λ con los números $1, 2, \cdots, \ell(\lambda)$ escribiendo de la manera usual (escribiendo de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.).

Ejercicio 3.2 (Ejemplos de módulos $\mathcal{H}^\lambda$)**.** Verificar que para $\mathbb{S}_3$, $\mathcal{H}^{(3)} = \mathcal{L}[1]$ es la representación trivial, $\mathcal{H}^{(21)}$ es la representación definición y $\mathcal{H}^{(111)}$ es la representación regular. Más generalmente, demostrar que $\mathcal{H}^{(n)}, \mathcal{H}^{(n-1,1)}$ y $\mathcal{H}^{(1^n)}$ son las representaciones trivial, definición y regular de $\mathbb{S}_n$.

Ejercicio 3.3 (Dimensión de los módulos $\mathcal{H}^\lambda$)**.** Demostrar que la dimensión de $\mathcal{H}^\lambda$ es

$$\dim \mathcal{H}^\lambda = \frac{n!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\cdots\lambda_k!}.$$

La noción de tableau inyectivo también nos permite construir una familia completa de representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$.

Definición 3.4 (Las representaciones irreducibles del grupo simétrico)**.** Sea t un tableau inyectivo, definimos

$$S^\lambda = \mathcal{L}[a_t : t \text{ tableau inyectivo de forma } \lambda]$$

donde a_t es el polinomio que se obtiene al antisimétrizar a $x^{t(\lambda)}$ con respecto a las columnas de diagrama de Young de λ. Más precisamente, sea $\mathbb{C}_t$ el subgrupo de Young definido por el conjunto de todas las permutaciones que estabilizan las entradas en las columnas de t. Tenemos entonces que

$$a_t = \sum_{\sigma \in C_t} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma \cdot x^t$$

Ejercicio 3.4. Verificar que si $t = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$, entonces su estabilizador es $\mathbb{S}_{\{1,3\}} \times \mathbb{S}_{\{2,4\}}$, y $a_t = (x_3 - x_1)(x_4 - x_2)$. Calcular el polinomio que corresponde al otro tableau estándar de tipo $(2, 2)$.

Ejercicio 3.5 (Estructura de módulo cíclico)**.** Demuestre que el grupo simétrico actúa como $\sigma \cdot a_t = a_{\sigma t}$, y que esto implica que las representaciones S^λ tienen estructura de módulo cíclico:

$$S^\lambda = \mathcal{L}[\sigma \cdot a_{t(\lambda)} : \sigma \in \mathbb{S}_n]$$

Una representación acíclica siempre es irreducible.

Teorema 3.1 (Teorema Fundamental)**.** *Hemos construido un conjunto completo de representaciones irreducibles del grupo simétrico. Más precisamente,*

1. *Los $\mathbb{S}_n$-módulos S^λ son irreducibles.*

2. *S^λ es isomorfo a S^μ si y sólo si $\lambda = \mu$.*

3. *El conjunto $\{S^\lambda\}$ es un sistema completo de representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$.*

Ejercicio 3.6. Demuestre que el conjunto de los tableau estándar de forma λ indexan a una base de $\mathbb{S}^\lambda$. Concluya entonces que

$$f^\lambda = \dim S^\lambda$$
$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$$

Esta última identidad se puede demostrar elegantemente utilizando el famoso algoritmo de Robinson-Schensted-Knuth, ver [2, 7, 9]. Los números $\frac{(f^\lambda)^2}{n!}$ definen una medida sobre el conjunto de las particiones de n, la medida de Pancherel del grupo simétrico.

Ejercicio 3.7 (El determinante de Vandermonde)**.** El polinomio de Vandermonde Δ_n se define como el determinante de la matriz de Vandermonde $(x_i^{n-j})_{i,j=1}^n$.

Demuestre que
$$\Delta_n = a_{(n-1,n-2,\dots,1,0)} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

Sea S un conjunto con cardinalidad k. En lo que sigue, denotamos por $\Delta_k(S)$ el determinante de Vandermonde asociado a las variables en S. Veamos como podemos utilizar estas funciones para dar una descripción alternativa del conjunto completo de representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$.

Ejercicio 3.8 (Las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_3$.)**.** Demostrar que la siguiente lista nos proporciona un conjunto completo de representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_3$: La representación trivial: $S^3 = \mathcal{L}[1]$, la representación estándar $S^{2,1} = \mathcal{L}[x_3 - x_1\,, x_2 - x_1]$ y la representación alternante: $S^{1,1,1} = \mathcal{L}[\Delta_3]$. Comparar estos resultados con los obtenidos en el ejercicio 2.3.

Ejercicio 3.9 (Las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_4$.)**.** Demostrar que la siguiente lista nos proporciona un conjunto completo de representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_4$.

$$\begin{aligned}
S^4 \quad &= \mathcal{L}[1] \\
S^{3,1} \quad &= \mathcal{L}[x_4 - x_1\,, x_3 - x_1\,, x_2 - x_1\,, x_4 - x_2 \,\cdots] \\
S^{2,2} \quad &= \mathcal{L}[(x_1 - x_3)(x_2 - x_4), (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)] \\
S^{2,1,1} \quad &= \mathcal{L}[\Delta_3(x_1, x_2, x_3), \Delta_3(x_1, x_3, x_4), \Delta_3(x_1, x_2, x_4)] \\
S^{1,1,1,1} &= \mathcal{L}[\Delta_4]
\end{aligned}$$

En general, se conoce muy poco acerca de cómo descomponer una representación como suma directa de sus representaciones irreducibles. El caso particular de las representaciones de $\mathcal{H}^\lambda$ es especial. Su descomposición se describe simplemente en el lenguage de la combinatoria de los tableros de Young y viene descrita por la *regla de Young*.

Teorema 3.2 (La regla de Young)**.** *Descomposición de la representación $\mathcal{H}^\mu$ en términos de sus componentes irreducibles.*

$$\mathcal{H}^\mu = \oplus_\lambda K_{\lambda,\mu} S^\lambda$$

donde los $K_{\lambda,\mu}$ son los coeficientes de Kostka.

Ejercicio 3.10 (Un ejemplo de la regla de Young)**.** Demostrar que

$$\mathcal{H}^{(3,2,1)} = S^{(3,2,1)} \oplus S^{(3,3)} \oplus 2 \cdot S^{(4,2)} \oplus S^{(4,1,1)} \oplus 2 \cdot S^{(5,1)} \oplus S^{(6)}.$$

Sabemos que el coeficiente de Kostka $K_{\lambda,1^n} = f^\lambda$, es igual al número de tableaux estándar de forma λ. Tenemos entonces que

$$\mathcal{H}^{(1^n)} = \oplus_{\lambda \vdash n} (S^\lambda)^{\oplus f^\lambda}$$

3.1. Las representaciones irreducibles del grupo lineal general.

En la sección anterior vimos como obtener las potencias simétricas y alternantes a partir de las representaciones trivial y alternante del grupo simétrico. Veamos qué sucede al aplicar el functor $\mathbb{V}(\cdot)$ a las representaciones del grupo simétrico que acabamos de construir.

Como un ejercicio, el lector deberá verificar que dada cualquier partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)$, obtenemos la siguiente representación de $GL(V)$:

$$\mathbb{V}(\mathcal{H}^\lambda) \cong Sym^{\lambda_1}(V) \otimes Sym^{\lambda_2}(V) \otimes \cdots \otimes Sym^{\lambda_l}(V).$$

Al igual que en el caso del grupo simétrico, esta representación no es irreducible, y su descomposición en irreducibles viene dada por los coeficientes de Kostka.

A partir de las representaciones irreducibles de los grupos simétricos $\mathbb{S}_n$, obtenemos a un conjunto completo de representaciones irreducibles de $GL(V)$.

Teorema 3.3. *La familia de representaciones polinomiales del grupo lineal general $GL(V)$*

$$V^\lambda := \mathbb{V}(S^\lambda)$$

donde λ es una partición de longitud $\leq \dim(V)$, es una familia completa de representaciones polinomiales irreducibles de $GL(V)$. Nótese que, al no tener ninguna condición sobre $|\lambda|$ esta es una familia infinita.

Más aún, tenemos la siguiente descomposición de $V^{\otimes n}$ como $GL(V)$-módulo :

$$V^{\otimes n} = \mathbb{V}(\mathbb{C}[\mathbb{S}_n]) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (V^\lambda)^{\oplus f^\lambda}$$

donde la suma se toma sobre todas las particiones de n de longitud menor o igual a $dim(V)$.

El algoritmo de Robinson-Schensted-Knuth (RSK), ver [9], nos proporciona una biyección entre el número de funciones $[n] \to [m]$, y las parejas de tableaux, el primero estándard con entradas en n, el segundo semi-estándar con entradas en m. En este contexto nos proporciona una demostración combinatoria de esta identidad, al nivel de espacios vectoriales.

4. Las funciones simétricas.

Ya en nuestra primera lección, introdujimos las funciones simétricas a través del estudio de las matrices no negativas. En esta segunda lección las estudiaremos desde un punto de vista algebraico. Para esto haremos un énfasis particular en la relación que existe entre la estructura de álgebra de Hopf de funciones simétricas y la teoría de representaciones del grupo simétrico y del grupo lineal general.

A un conjunto ordenado de variables lo llamamos alfabeto. Resulta muy útil escribir un alfabeto como una suma formal de variables. Por ejemplo, el alfabeto $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ lo escribimos como $X = x_1 + x_2 + \cdots$. Denotamos por $\mathbb{Z}[|X|]$ al álgebra de las series formales en el alfabeto X. Si π es una permutación en $\mathbb{S}_n$ y $f \in \mathbb{Z}[|X|]$ definimos

$$f[X] \cdot \pi = p(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1} \cdots) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \cdots, x_{\pi(n)}, x_{n+1} \cdots)$$

Denotamos por Sym la subálgebra de $\mathbb{Z}[|X|]$ formada por las series, con un número finito de componentes no nulas, que son invariantes bajo esta acción (para cada $n \in \mathbb{N}$). Por ejemplo,

$$p_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \ldots \in Sym$$
$$1 + p_k + p_k^2 + \ldots = \frac{1}{1 - p_k} \notin Sym$$

El segundo es un ejemplo de una función que, a pesar de ser invariante, tiene un número infinito de componentes no nulas. Tales funciones pertenecen a la completación de Sym. Denotamos por $Sym^{(k)}$a la componente homogénea de grado k de Sym.

Definición 4.1 (Las funciones simétricas monomiales, m_λ)**.** Dada $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$, definimos m_λ como la suma de todos los monomios *diferentes* que se obtienen al simetrizar $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_\ell^{\lambda_\ell}$. Por ejemplo, $m_{2,1,1}$ es igual a

$$m_{2,1,1} = x_1^2 x_2 x_3 + x_2^2 x_1 x_3 + x_3^2 x_1 x_2 + \cdots$$

Ejercicio 4.1 (El espacio vectorial $Sym^{(k)}$)**.** Demuestre que el conjunto de las funciones simétricas monomiales m_λ, con $\lambda \vdash k$, constituye una base para $Sym^{(k)}$. En particular, la dimensión de $Sym^{(k)}$ viene dada por el número de particiones de k.

Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$ una partición. Definimos tres familias de funciones simétricas, las llamadas *bases multiplicativas,*

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_\ell}, \qquad p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_\ell}, \qquad h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_\ell}.$$

donde h_n es igual a la suma de todos los monomios de grado n, e_m la suma de todos los monomios de grado n libres de cuadrados, y p_n la suma de las potencias n-ésimas de los elementos de X. Por ejemplo, si $X = x+y+z$, entonces $h_2[X] = x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz$, $e_2[X] = xy + xz + yz$ y $p_2[X] = x^2 + y^2 + z^2$.

Teorema 4.1 (Teorema Fundamental de las funciones simétricas)**.** *Sea X un alfabeto. La familia de funciones simétricas $e_\lambda[X]$ es una base (como $\mathbb{Z}$–módulo) para Sym.*

$$Sym[X] = \mathbb{Z}[e_1[X], e_2[X], \cdots].$$

Este teorema no es difícil de demostrar. Se puede hacer estudiando la matriz de cambio de bases entre las funciones simétricas elementales y las monomiales, y observando que son triangulares y con todas sus entradas en la diagonal principal iguales a uno. O se puede hacer utilizando al orden lexicográfico en el algoritmo de la división de Buchberger.

En el siguiente ejercicio estudiaremos las matrices de cambio de base entre las bases multiplicativas de Sym. Obtendremos entonces que las tres familias multiplicativas que hemos introducidos son, como su nombre lo sugiere, bases para Sym.

Ejercicio 4.2 (Familias multiplicativas, matrices de cambio de base)**.** Definimos las siguientes funciones generatrices asociadas a las bases multiplicativas de Sym:

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{k\geq 0} e_k t^k = \prod_{i\geq 1}(1+tx_i) \\ H(t) &= \sum_{k\geq 0} h_k t^k = \prod_{i\geq 1}(1-tx_i)^{-1} \\ P(t) &= \sum_{k\geq 0} p_{k+1} t^k \end{aligned}$$

Demuestre las siguientes identidades entre las funciones generatrices $E(t), H(t)$ y $P(t)$:

$$E(t)H(t) = 1, \qquad P(t) = \frac{H'(t)}{H(t)}, \qquad P(-t) = \frac{E'(t)}{E(t)}. \tag{3}$$

De estas identidades, deduzca que para cada entero $k > 0$

1. Recurrencia entre las elementales y las homogéneas : $\sum_{i+j=k}(-1)^i e_i h_j = 0$.
2. Concluya que las funciones simétricas homogéneas constituyen una base para Sym.
3. Identidades de Newton: $kp_k = \sum_{i+j=k} p_i h_j = \sum_{i+j=k}(-1)^{j-1} p_i e_j$.
4. La función completa homogénea h_n y las series de potencias : $h_n = \sum_{\lambda\vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda$
5. La función elemental e_n y las series de potencias : $e_n = \sum_{\lambda\vdash n}(-1)^{n+\ell(\lambda)} z_\lambda^{-1} p_\lambda$.

Esto nos permite definir Sym como el álgebra de polinomios $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \cdots]$, donde las e_i son variables formales, y luego introducir las otras bases de Sym utilizando las identidades que acabamos de encontrar.

Ejercicio 4.3 (La involución ω)**.** Definimos un endomorfismo

$$\begin{aligned} \omega : Sym \to Sym \\ \omega(e_n) = h_n \end{aligned}$$

Demuestre que ω es una involución utilizando la recursión entre las homogeneas y las elementales obtenida en el Ejercicio 4.2.

Ya en la primera de nuestra serie de lecciones introdujimos la más intrigante de las bases para el álgebra de las funciones simétricas; la base de Schur. En aquel momento las funciones de Schur se definieron utilizando la matriz de Jacobi–Trudi que las expresa en la base de las funciones completas homogéneas. Daremos ahora la definición combinatoria para esta importante base.

Definición 4.2 (Definición combinatoria de las funciones de Schur.)**.** Sea $X = x_1 + x_2 + \ldots$ un alfabeto y sea λ una partición de n.

La función de Schur s_λ se define como

$$s_\lambda[X] = \sum_T x^T$$

donde sumamos sobre todos los tableaux semi–estándar T de forma λ y donde x^T denota el peso del tableau T.

Definimos las funciones de Schur sesgadas $s_{\lambda/\mu}[X]$ similarmente, pero ahora sumamos sobre todos los tableaux semi-estándar sesgados T de forma λ/μ.

Por ejemplo,

$$s_{(2,1)} = m_{(2,1)} + 2m_{(1,1,1)}.$$
$$s_{(2,1)/(1)} = h_1^2.$$

No es evidente de esta definición que las funciones de Schur sean simétricas. Esto se puede ver directamente utilizando un elegante argumento de D. Knuth (ver [7]).

Ejercicio 4.4. Utilice la definición combinatoria de una función de Schur para demostrar que

$$\begin{aligned} s_{(n)} &= h_n \\ s_{(1^n)} &= e_n \\ h_{(n-1,1)} &= s_{(n)} + s_{(n-1,1)}. \end{aligned}$$

De la definición combinatoria de las funciones de Schur se puede conseguir su desarrollo en la base de las funciones simétricas monomiales. Recuerde que el coeficiente de Kostka $K_{\lambda,\mu}$ se define como el número de tableaux semi–estándar de forma λ y contenido μ. El hecho de que las funciones de Schur sean simétricas es equivalente a la igualdad $K_{\lambda,\mu} = K_{\lambda,\tilde{\mu}}$ para cualquier rearreglo de las parte de μ. Concluimos que

$$s_\lambda = \sum_\mu K_{\lambda,\mu} m_\mu.$$

Ejercicio 4.5 (Las funciones de Schur son una base para Sym)**.** Demuestre que el conjunto de las funciones de Schur, $\{s_\lambda\}_\lambda$, donde $\lambda \vdash k$, forma una base para $Sym^{(k)}$. Para esto demuestre que el determinante de la matriz de Kostka (la matriz definida por los coeficientes de Kostka en el orden lexicográfico) tiene determinante diferente de cero.

Teorema 4.2 (La involución ω y la base de Schur)**.** *La involución ω, aplicada a la base de Schur, tiene el efecto de transponer la partición que le sirve de índice*

$$\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$$

Observación 4.1. *Con frecuencia, no es demasiado importante el tamaño del alfabeto con el que trabajamos. (No siempre. Nótese que $s_{1,1,1}[X]$ es cero si $|X| < 3$.) Por otra parte, para cada una de las bases que hemos definido*

$$b(x_1, \cdots, x_l, 0, \cdots, 0) = b(x_1, \cdots, x_l)$$

Esto implica, por ejemplo, las identidades entre las funciones de Schur en m variables, son ciertas para las funciones de Schur, en un número infinito de variables, cuando imponemos la condición adicional que todas las particiones que aparezca tengan longitud $\leq m$.

Definimos un producto escalar sobre Sym, que denotamos por $\langle\ ,\ \rangle$, diciendo que la base de Schur es una base ortonormal:

$$\langle s_\mu, s_\nu \rangle = \delta_{\mu,\nu}.$$

donde $\delta_{\mu,\nu}$ es la función delta de Kronecker. De la ortonormalidad de la base de Schur vemos que la involución ω es una isometría.

Este mismo producto escalar se puede definir de manera equivalente diciendo que $\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$, o que $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda$.

4.1. La estructura de álgebra de Sym.

El producto de dos funciones simétricas es una función simétrica, de manera que Sym tiene una estructura de álgebra.

Definición 4.3 (Los coeficientes de Littlewood–Richardson y el producto de funciones de Schur)**.** Dado que las funciones de Schur son una base para Sym, para cualquier μ y ν podemos encontrar constantes $c^{\lambda}_{\mu,\nu}$ tales que

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c^{\lambda}_{\mu,\nu} s_\lambda$$

Esta identidad se traduce en

$$c^{\lambda}_{\mu,\nu} = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle$$

Los coeficientes $c^{\lambda}_{\mu,\nu}$ se conocen como *los coeficientes de Littlewood-Richardson.*

Los coeficientes de Littlewood-Richardson juegan un rol fundamental en la teoría de las funciones simétricas (y sus aplicaciones a la teoría de representaciones, entre muchas otras áreas). La famosa regla de Littlewood–Richardson nos proporciona una interpretación combinatoria para estos coeficientes (cuentan la cardinalidad de un cierto conjunto de tableaux semi-estándar definido en función de λ, μ y ν.) Esta interpretación combinatoria también nos proporciona una algoritmo (ineficiente) para calcularlos.

Veamos ahora otra instancia en la que los coeficientes de Littlewood-Richardson aparecen de manera natural en la teoría de las funciones simétricas.

Definición 4.4 (Los coeficientes de Littlewood-Richardson y el adjunto de la multiplicación por una función de Schur)**.** Las funciones de Schur sesgadas se expresan en la base de Schur utilizando los coeficientes de Littlewood-Richardon.

$$s_{\lambda\backslash\mu} = \sum_\nu c^{\lambda}_{\mu,\nu} s_\nu$$

Por lo tanto, las funciones de Schur sesgadas son el adjunto de la multiplicación por una función de Schur. Más precisamente, definimos una operación lineal $s^{\perp}_{\mu}$ sobre Sym, declarando $s^{\perp}_{\mu} s_\lambda = s_{\lambda/\mu}$. (Observe que por definición $s^{\perp}_{\mu} s_\lambda = 0$ si μ no se encuentra contenido en λ.)

La identidad $c^{\lambda}_{\mu,\nu} = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle = \langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu \rangle$ implica que $s^{\perp}_{\mu}$ es el adjunto de la multiplicación por s_μ; es decir, que para cualquier par de funciones simétricas f y g :

$$\langle s_\mu f, g \rangle = \langle f, s^{\perp}_{\mu} g \rangle.$$

Ejercicio 4.6. Calcular el adjunto de la multiplicación por p_λ, e_λ y h_λ.

5. El álgebra de Hopf de las funciones simétricas

Las funciones simétricas, junto con la operación de multiplicación, forman un álgebra graduada, pero tienen una estructura mucho más rica. Antes de empezar a describirla introduciremos las nociones de coálgebra, biálgebra y álgebra de Hopf.

Definición 5.1 (Coálgebra)**.** Sea $\mathbb{K}$ un anillo conmutativo. Una *coálgebra* C es un $\mathbb{K}$–módulo junto con una *comultiplicación* $\Delta : C \to C \otimes C$ y una *counidad* $\epsilon : C \to \mathbb{K}$ que satisfacen las propiedades coasociativa y counitaria. Esto es,

$$(\Delta \otimes 1)\Delta = (1 \otimes \Delta)\Delta$$
$$(\epsilon \otimes 1)\Delta = (1 \otimes \epsilon)\Delta$$

donde 1 es la identidad de C.

Definición 5.2 (Biálgebra)**.** Sea B es un $\mathbb{K}$–módulo que es simultáneamente un álgebra y una coálgebra. Decimos que es una *biálgebra* si ambas estructuras son compatibles. Esto es, si tanto la comultiplicación como la counidad son morfismos (unitarios) de álgebras. Equivalentemente, se puede pedir que tanto la multiplicación como la unidad sean morfismos de coálgebras.

Definición 5.3 (Álgebra de Hopf)**.** Una aplicación $\mathbb{K}$–lineal $\psi : H \to H$ sobre una biálgebra H se denomina antípoda si para cada h en H se tiene que

$$\sum h_i \psi(h'_i) = \epsilon(h)1 = \sum \psi(h_i)h'_i$$

donde $\Delta h = \sum h_i \otimes h'_i$. Un álgebra de Hopf es una biálgebra que posee una antípoda.

Recuerdese que denotamos por $f[X]$ a la función f evaluada en el alfabeto X. Explícitamente,

$$f[X] = f(x_1, x_2, \ldots)$$

Ahora queremos pasar a considerar una función simétrica como un alfabeto. Por ejemplo, a la función simétrica $p_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots$ la identicamos con el conjunto de "variables" $\{x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots\}$.

Definición 5.4 (El pletismo de funciones simétricas)**.** Definimos el *pletismo (o sustitución)* de funciones simétricas trabajando con la base de las series de potencia. Como nos sugiere el ejemplo anterior, queremos que $p_n[p_2] = p_{2n}$. Para esto, procedemos de la siguiente manera: Sea g una serie de potencias formal sobre el anillo de las series formales $\mathbb{Q}[[x_1, x_2, \cdots]]$. Escribimos

$$g = \sum_\alpha u_\alpha$$

donde cada u_α es un monomio (con coeficiente uno) en $\mathbb{Q}[[x_1, x_2, \cdots]]$. Por ejemplo, $2x = x + x$.

Definimos

$$p_n[g] = \sum_\alpha c_\alpha u_\alpha^n$$
$$p_\lambda[g] = p_{\lambda_1}[g]p_{\lambda_2}[g] \cdots p_{\lambda_n}[g]$$

donde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

Por ejemplo, utilizando la definición de pletismo, vemos que

$$p_n[2x + 2y] = p_n[x + x + y + y] = x^n + x^n + y^n + y^n = 2x^n + 2y^n.$$

Finalmente, definimos $f[g]$, para cualquier función simétrica f, diciendo que $f[g]$ es lineal en f. Para calcularlo empezamos por expresar a f en la base de las series de potencias.

El pletismo *no* es una transformación lineal, por ejemplo $p_\lambda[2x] = 2^{\ell(\lambda)} p_\lambda[x]$.

Ejercicio 5.1. Demuestre las siguientes propiedades de la operación de sustitución.

1. Si f y g son funciones simétricas, entonces $f[g]$ también lo es.
2. La operación de sustitución es asociativa.
3. Se tiene que $p_n[p_m] = p_{nm}$.
4. En general, $f[g] \neq g[f]$.
5. Para cualquier función simétrica f se tiene que $p_n[f] = f[p_n]$.

Definición 5.5. Dados dos alfabetos $X = x_1 + x_2 + \cdots$ e $Y = y_1 + y_2 + \cdots$, definimos los alfabetos suma y producto como

$$\begin{aligned} X + Y &= x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \cdots \\ XY &= x_1y_1 + x_1y_2 + \cdots + x_iy_j + \cdots \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2 (Los coeficientes de Littlewood–Richardson y la suma de alfabetos)**.** Para evaluar $s_\lambda[X+Y]$ podemos asumir que todas las variables $x_i \in X$ son menores que todas las $y_j \in Y$, esto es posible ya que s_λ es una función simétrica. De la definición combinatoria de una función de Schur sesgada obtenemos que $s_\lambda[X+Y]$ es una suma de funciones simétricas de la forma $s_\mu[X]s_{\lambda/\mu}[Y]$, donde $\mu \in \lambda$ es la partición que definen las entradas en X y λ/μ es la partición que definen las entradas en Y.

$$s_\lambda[X + Y] = \sum_{\mu \in \lambda} s_\mu[X] s_{\lambda/\mu}[Y] = \sum_{\mu,\nu} c^\lambda_{\mu,\nu}\, s_\mu[X] s_\nu[Y]$$

Un problema abierto importante en la combinatoria algebraica es el de entender el desarrollo de la función $s_\lambda[XY]$ en la base de Schur. Por otra parte, el desarrollo de $s_{(n)}[XY] = h_n[XY]$ es particularmente útil y viene dada por el kernel de Cauchy, que nos proporciona el desarrollo de $h_n[XY]$ en cualquier par de bases duales[1] u_λ y v_λ :

[1] Las bases u_λ y v_λ son *duales* si $\langle u_\lambda, v_\nu \rangle = \delta_{\lambda,\nu}$

Teorema 5.1 (El kernel de Cauchy)**.**

$$\begin{aligned} h_n[XY] &= \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \\ &= \sum_{\lambda} u_\lambda[X] v_\lambda[Y] \\ &= \sum_{\lambda} s_\lambda[X] s_\lambda[Y] \end{aligned}$$

Además de las funciones de Schur, los otros dos pares mas importantes de bases de funciones simétricas ortonormales son el par $\{h_\lambda\}$ *y* $\{m_\lambda\}$*, y el par* $\{p_\lambda\}$ *y* $\{p_\lambda/z_\lambda\}$*.*

5.1. La estructura de álgebra de Hopf de Sym, la suma de alfabetos y los coeficientes de Littlewood–Richardson.

Pasamos ahora a describir la estructura de álgebra de Hopf de Sym con respecto a la multiplicación ordinaria de series de potencias. Identificamos $Sym \otimes Sym$ con las funciones en dos alfabetos X y Y que son simétricas en cada alfabeto separadamente. Bajo esta identificación $f \otimes g$ corresponde al producto $f[X]g[Y]$.

Utilizando la operación de suma de alfabetos, definimos una operación de comultiplicación sobre Sym,

$$\begin{gathered} \Delta : Sym \to Sym \otimes Sym \\ \Delta f = f[X + Y] \end{gathered}$$

Se tiene que (Sym, Δ) tiene estructura de coálgebra. La counidad ϵ viene dada por la proyección $\epsilon : f \mapsto f(0, 0, \ldots)$.

Ejercicio 5.3. Demuestre que

$$\begin{aligned} \Delta(h_n) &= \sum_{k+l=n} h_k \otimes h_l, \\ \Delta(p_n) &= p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n \quad (n \geq 1) \\ \Delta(s_\lambda) &= \sum_{\mu,\nu} c^\lambda_{\mu,\nu} s_\mu \otimes s_\nu \end{aligned}$$

donde los $c^\lambda_{\mu,\nu}$ son los coeficientes de Littlewood-Richardson.

Ejercicio 5.4. Sobre $Sym \otimes Sym$ definimos un producto escalar

$$\langle f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes g_2 \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle \langle f_2, g_2 \rangle$$

para toda $f_1, f_2, g_1, g_2 \in Sym$, Demuestre que

$$\langle \Delta f, g \otimes h \rangle = \langle f, gh \rangle$$

El antípoda en esta biálgebra graduada viene dada por una pequeña variante de la involución ω. En efecto, La involución

$$\bar{\omega} : Sym \to Sym$$
$$\bar{\omega}(h_i) = (-1)^i e_i$$

para cada $i \geq 1$, es una antípoda para Sym. Concluimos entonces que

Teorema 5.2. *La familia* $(Sym, \mu, 1, \Delta, \epsilon, \bar{\omega})$ *es un álgebra de Hopf graduada, donde* μ *es la multiplicación heredada del anillo de las series formales,* 1 *es su identidad, el coproducto viene dado por* $\Delta f = f[X+Y]$*, y su counidad por* $\epsilon(f) = f(0,0,\ldots)$*.*

Más aún, el producto escalar de Sym es compatible con la estructura de biálgebra en el sentido de que

$$\langle \Delta f, g \otimes h \rangle = \langle f, gh \rangle$$
$$\langle \bar{\omega} f, \bar{\omega} g \rangle = \langle f, g \rangle$$
$$\langle f, 1 \rangle = \epsilon(f)$$

5.2. La estructura de biálgebra de Sym, el producto de alfabetos y los coeficientes de Kronecker.

Ahora pasamos a estudiar una segunda estructura de biálgebra para Sym (aunque no de álgebra de Hopf). Para esto introducimos el *producto de Kronecker* que, como veremos, corresponde al producto tensorial interno entre representaciones del grupo simétrico, a través de la operación del producto de dos alfabetos.

El producto de alfabetos nos define una segunda comultiplicación sobre Sym:

$$\Delta^\star : Sym \to Sym \otimes Sym$$
$$\Delta^\star f = f[XY].$$

cuya counidad viene dada por

$$\epsilon^\star f = f(1,0,0,\ldots)$$

para toda $f \in Sym$.

Ejercicio 5.5. Demuestre que

$$\Delta^\star h_n = \sum_{|\lambda|=n} s_\lambda \otimes s_\lambda, \qquad \Delta^\star e_n = \sum_{|\lambda|=n} s_\lambda \otimes s_{\lambda'}, \qquad \Delta^\star p_n = p_n \otimes p_n.$$

Más aún, $\epsilon^\star h_n = 1$, $\epsilon^\star e_n = \delta_{1,n} + \delta_{0,n}$ y $\epsilon^\star p_n = 1$.

Definición 5.6 (Los coeficientes de Kronecker y el producto de alfabetos)**.** El desarrollo $\Delta^\star s_\lambda$ en la base de Schur:

$$s_\lambda[XY] = \sum_{\mu,\nu} \gamma^\lambda_{\mu,\nu} s_\mu[X] s_\nu[Y]$$

Nos define una nueva familia de constantes de estructuras para Sym, esta vez con respecto a la comultiplicación $\Delta^\star$. Los coeficientes $\gamma^\lambda_{\mu,\nu}$ los llamamos *coeficientes de Kronecker*. Pronto veremos que los coeficientes de Kronecker nos describen la multiplicidad con la que aparece la representación irreducibe S^λ, en el producto tensorial $S^\mu \otimes S^\nu$. Por lo tanto, son todos enteros no–negativos.

Ejercicio 5.6. Demuestre que los coeficientes de Kronecker $\gamma^\lambda_{\mu,\nu}$ son diferentes de cero sólo si $|\lambda| = |\mu| = |\nu|$.

Los coeficientes de Kronecker nos permiten definir el *producto de Kronecker* entre s_μ y s_ν utilizando para esto a la base de Schur :

$$s_\mu \star s_\nu = \sum_\lambda \gamma^\lambda_{\mu,\nu} s_\lambda \tag{4}$$

Extendiendo a Sym por linealidad, obtenemos una segunda operación de multiplicación para Sym. Llamamos a esta operación *producto de Kronecker (o producto interno).*

Ejercicio 5.7. Utilizando que los elementos $s_\mu[X]s_\nu[Y]$ forman una base ortonormal de $Sym \otimes Sym$; demostrar que para cada $f, g, h \in Sym$

$$\langle \Delta^\star f, g \otimes h \rangle = \langle f, g \star h \rangle$$

En otras palabras, que $\Delta^\star$ es el adjunto del producto de Kronecker.

Ejercicio 5.8. Demostrar que $p_n[XY] = p_n[X]p_n[Y]$ y $p_\lambda * p_\mu = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda p_\lambda$. Concluya que

$$p_\lambda * p_\mu = \langle p_\lambda, p_\mu \rangle p_\lambda.$$

Demuestre que el producto de Kronecker es conmutativo.

El siguiente ejercicio muestra que la unidad con respecto al producto de Kronecker está dada por una suma infinita de funciones homogéneas completas, y por lo tanto no está en Sym sino en su completación.

Ejercicio 5.9. Demuestrar que $h_k \star f = f \star h_k = f$, para toda $f \in Sym^{(n)}$. Deducir entonces que, en la completación $\widehat{Sym}$ de Sym la identidad con respecto al producto de Kronecker viene dada por $\sum_{k\geq 0} h_k$.

6. El álgebra de Grothendieck del grupo simétrico y del grupo lineal general.

En esta sección revisitaremos la teoría de representaciones del grupo simétrico. En la sección 3 ya construimos una familia completa de representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$, para cada n. Ahora queremos estudiar simultáneamente estas familias de representaciones irreducibles desde un punto de vista algebraico.

Sea $R(\mathbb{S}_n)$ el grupo de Grothendieck del grupo simétrico $\mathbb{S}_n$. Esto es, el grupo abeliano generado por las clases de equivalencia de las representaciones irreducibles del grupo simétrico con la operación de suma directa. Definimos

$$R(\mathbb{S}) = \{R(\mathbb{S}_n) : n \geq 1\}$$

junto con la inclusión canónica:

$$\rho_{n,m} : R(\mathbb{S}_n) \times R(\mathbb{S}_m) \hookrightarrow R(\mathbb{S}_{n+m}).$$

que considera un par de permutaciones (π, σ) en $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m$ como una permutación de $\mathbb{S}_{m+m}$ aplicando π a los números $1, \cdots, n$ y σ a $n+1, \cdots, m$ de la manera canónica : $\sigma(n+i) := \sigma(i)$.

Sobre $R(\mathbb{S})$ se puede definir una estructura de álgebra de Hopf y una segunda estructura de biálgebra que, como veremos, corresponden a las estructuras que acabamos de estudiar sobre Sym.

Definición 6.1 (La estructura de álgebra de Hopf sobre $R(\mathbb{S})$)**.** Sean X e Y dos $\mathbb{S}_n$–módulos. Definimos *el producto entre* X *e* Y, que denotamos por $X \circ Y$, a través del procedimiento de inducción de representaciones:

$$X \circ Y := \rho_{n,m}(X \otimes Y)\uparrow_{\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_m}^{\mathbb{S}_{n+m}} \tag{5}$$

La unidad de esta álgebra de Hopf viene dada por la unidad del álgebra $R(\mathbb{S})$; es decir, la representación trivial de $\mathbb{S}_0$.

El coproducto viene dado por la suma de las restricciones de $R(\mathbb{S}_n)$ a $R(\mathbb{S}_i) \otimes R(\mathbb{S}_j)$, para $i + j = n$ enteros no negativos.

$$\Delta : R(\mathbb{S}_n) \to \sum_{i+j=n} R(\mathbb{S}_i) \otimes R(\mathbb{S}_j)$$
$$\Delta(X) = \sum_{i+j=n} X\downarrow_{\mathbb{S}_i \times \mathbb{S}_j}^{\mathbb{S}_{i+j}}$$

La counidad está definida por la proyección sobre $R(\mathbb{S}_0)$ y nos da la multiplicidad de la representación trivial de $\mathbb{S}_0$.

Nótese que no es trivial que la comultiplicación sea un morfismo de álgebras. Esto es una consecuencia del teorema de Mackey. Para una exposición completa de estos resultados ver el libro de Zelevinski [10].

El antípoda corresponde (salvo por un signo) a tomar el producto tensorial con la representación alternante.

Definición 6.2 (La estructura de biálgebra sobre $R(\mathbb{S})$ con respecto al producto de Kronecker)**.** Sean X e Y dos $\mathbb{S}_n$-módulos. El producto de Kronecker (también llamado producto tensorial interno) se define como el $\mathbb{S}_n$–módulo $X \otimes Y$ junto con la acción diagonal del grupo simétrico. Esto es, para cada $\pi \in \mathbb{S}_n$

$$\pi(X \otimes Y) = \pi X \otimes \pi Y$$

Denotamos el $\mathbb{S}_n$–módulo resultante por $X \star Y$. Nótese que si χ es el carácter de X y ϕ el carácter de Y, entonces el carácter del producto de Kronecker viene dado por $(\chi\phi)(\pi) = \chi(\pi)\phi(\pi)$.

Los *coeficientes de Kronecker* también pueden ser definidos como las multiplicidades de las representaciones irreducibles en el producto tensorial de dos representaciones irreducibles del grupo simétrico. Luego veremos que esta definición es equivalente a la que dimos en la sección anterior en término de operaciones entre alfabetos.

Si μ y ν son particiones de n, se definen los coeficientes de Kronecker $\gamma^{\lambda}_{\mu,\nu}$ como

$$\chi^{\mu}\chi^{\nu} = \sum_{\lambda \vdash n} \gamma^{\lambda}_{\mu,\nu}\chi^{\lambda}.$$

Equivalentemente, la siguiente ecuación define los coeficientes de Kronecker y demuestra que son simétricos en μ, ν y λ:

$$\gamma^{\lambda}_{\mu,\nu} = \langle \chi^{\lambda}, \chi^{\mu}\chi^{\nu} \rangle_{\mathbb{S}_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \chi^{\lambda}(\sigma)\chi^{\mu}(\sigma)\chi^{\nu}(\sigma),$$

donde $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{S}_n}$ es el producto escalar en el espacio generado por los caracteres de $\mathbb{S}_n$, sus funciones de clase.[2]

Extendemos la definición del producto de Kronecker a $R(\mathbb{S})$ diciendo que el producto de Kronecker entre una representación $\mathbb{S}_n$ y otra de $\mathbb{S}_m$ es cero si $n \neq m$.

Ejercicio 6.1. Demuestre que la unidad de $Sym^{(n)}$, con respecto al producto de Kronecker, está dada por la representación trivial de $\mathbb{S}_n$. Describa la counidad y la comultiplicación correspondiente.

Es importante darse cuenta que si X es un $\mathbb{S}_n$–módulo y Y es un $\mathbb{S}_m$–módulo, entonces $X \circ Y$ es un $\mathbb{S}_{m+n}$–módulo y $X * Y$ es un $\mathbb{S}_n$-módulo.

[2] La barra de conjugación desaparece en este producto porque todas las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$ pueden ser construidas sobre $\mathbb{Q}$.

7. La aplicación de Frobenius

Ahora nos proponemos explicar la relación existente entre la teoría de representaciones del grupo simétrico y la funciones simétricas Sym. Las funciones simétricas juegan el rol de funciones generatrices para los caracteres de las representaciones del grupo simétrico.

Teorema 7.1 (Frobenius)**.** *Si $\lambda \vdash n$, se tiene entonces que*

$$s_\lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} \chi^\lambda(\pi) p_\pi = \sum_{\mu \vdash n} \chi^\lambda(\mu) \frac{p_\mu}{z_\mu}.$$

Este resultado central nos describe elegantemente la relación que existe entre la teoría de las funciones simétricas, y la teoría de representaciones del grupo simétrico, [3, 7, 8]. Es este resultado el que nos permite definir la aplicación característica de Frobenius.

Sea CF^k el conjunto de todas las funciones de clase $f : \mathbb{S}_k \to \mathbb{Q}$ (funciones constantes en las clases de conjugación de $\mathbb{S}_k$.) En CF^k existe un producto escalar natural definido por

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_k} f(\pi) g(\pi)$$

Escribimos $\langle X, Y \rangle$ cuando X y Y son representaciones de $\mathbb{S}_k$ con carácteres ϕ y χ, respectivamente.

Estamos interesados en estudiar la siguiente transformación lineal :

Definición 7.1 (La característica de Frobenius)**.** Sea f es una función de clase de grado k. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{ch}^{(k)} &: CF^k \to Sym^{(k)} \\ \mathbf{ch}^{(k)}(f) &= \sum_{\mu \vdash k} f(\mu) \frac{p_\mu}{z_\mu} \end{aligned}$$

donde $f(\mu)$ denota $f(\pi)$ para cualquier permutación π de tipo μ.

El teorema de Frobenius nos dice entonces que

$$\mathbf{ch}(\chi^\lambda) = s_\lambda.$$

Este importante resultado nos permite definir las funciones de Schur a través del importante rol que juegan en la teoría de representaciones: *Las funciones de Schur son las imágenes, bajo la aplicación de Frobenius, de las representaciones irreducibles.*

El resultado anterior implica que **ch** es un isomorfismo de espacios vectoriales. La aplicación de Frobenius envía una base ortonormal de CF^k, los caracteres de las representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_n$, en la base ortonormal de $Sym^{(k)}$: las funciones de Schur. Concluimos entonces que la aplicación de Frobenius es una isometría.

Podemos utilizar la aplicación de Frobenius para obtener información sobre las funciones simétricas a partir de nuestros conocimientos de la teoría de representaciones del grupo simétrico. Por ejemplo, como es inmediato calcular los caracteres de las representaciones triviales y alternadas podemos concluir que

Ejercicio 7.1 (Frobenius, y las representaciones trivial y alternante.)**.** Utilizar que conocemos los caracteres de las representaciones trivial y alternante para demostrar que

$$h_n = \sum_{\mu \vdash n} s_\mu,$$
$$e_n = \sum_{\mu \vdash n} (-1)^{signo(\mu)} s_\mu.$$

donde el signo de una partición μ se define como el signo de cualquier permutación de tipo μ.

Teorema 7.2 (Frobenius)**.** *La aplicación de Frobenius es multiplicativa. Más precisamente:*

$$\mathbf{ch}(X \circ Y) = \mathbf{ch}(X)\ \ \mathbf{ch}(Y),$$
$$\mathbf{ch}(X \star Y) = \mathbf{ch}(X) \star \mathbf{ch}(Y).$$

La primera afirmación es una consecuencia de la fórmula de inducción de Frobenius. La segunda se sigue inmediatamente de la definición del producto de Kronecker.

Ejercicio 7.2. Describa el efecto de la aplicación de Frobenius sobre la unidad, la comultiplicación , la counidad y el antípoda del álgebra de Hopf de $R(\mathbb{S}_k)$.

Teorema 7.3. *La aplicación de Frobenius*

$$\mathbf{ch} : (R(\mathbb{S}), \circ) \to (Sym, \cdot)$$

es un isomorfismo de álgebras de Hopf. Y

$$\mathbf{ch} : (R(\mathbb{S}), \star) \to (Sym, \star)$$

es un isomorfismo de biálgebras.

7.1. Los caracteres de las representaciones irreducibles de grupo lineal general

Sea V un espacio vectorial de dimensión m. Escogiendo una base para V identificamos $GL(V)$ con $GL_m(\mathbb{C})$. Sea H el subgrupo de las matrices diagonales de $GL_m(\mathbb{C})$, y sea $diag(X)$ la matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal principal son $(x_1, \cdots, x_n)$.

Un vector v en una representacion V se llama vector de peso, con peso $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$, con coordenadas enteras, si

$$x \cdot v = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} v, \text{ para todo } x \text{ in } H$$

Se tiene entonces que cualquier representación V es una suma directa de espacios de peso $V = \oplus V_\alpha$, donde $V_\alpha = \{v \in V : x \cdot v = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} v, \text{para todo } x \in H\}$.

Una representación (finito-dimensional y holomorfa) V de $GL_m(\mathbb{C})$ es irreducible si y sólo si tiene un único vector de peso α en la descomposición anterior. Más aún, dos representaciones son isomorfas si y sólo si tienen el mismo vector de peso. Hemos visto que las representaciones polinomiales de $GL(V)$ vienen indexadas por particiones, y se pueden construir a partir de las representaciones irreducibles del grupo simétrico.

El carácter de una representación (finito dimensional y holomórfica) W de $GL(V)$, $Char_W = Char_W(x_1, \cdots, x_m) = \chi_W$ se define como la traza de $diag(x)$ sobre W.

Si descomponemos a $V = \oplus V_\alpha$ tenemos entonces que

$$\chi_V(x) = \sum_\alpha \dim(V_\alpha) x^\alpha = \sum_\alpha \dim(V_\alpha) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}$$

Y en particular, para V^λ tenemos un vector de peso para cada tableaux T con entradas en $[m]$, de manera que

$$Char(V^\lambda) = \sum X^T = s_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

es el polinomio de Schur indexado por λ.

En general, tenemos que

$$Char(W \oplus W') = Char(W) \oplus Char(W')$$
$$Char(W \otimes W') = Char(W)\, Char(W')$$

7.2. El algebra de Grothedieck del grupo lineal general y el fenómeno de dualidad de Schur-Weyl.

Definimos el anillo de representaciones de $R(GL_m)$ como el grupo abeliano generado por las clases de isomorfía de las representaciones polinomiales de GL_m, junto con la operación de la suma directa.

Veamos que $R(GL_m)$ hereda de la operación de inducción entre representaciones del grupo simétrico una estructura de álgebra de Hopf con respecto al producto tensorial de representaciones.

Sea X es una representación de $\mathbb{S}_n$ y Y una representación de $\mathbb{S}_m$, hemos visto que $X \circ Y$ es una representación de $\mathbb{S}_{n+m}$. Es sencillo demostrar que

$$\mathbb{V}(X \circ Y) \cong \mathbb{V}(X) \otimes \mathbb{V}(Y)$$

Por lo que la operación de inducción de representaciones del grupo simétrico corresponde a tomar el producto tensorial de representaciones de $GL(E)$. Más aún, el problema de descomponer $S^\lambda \circ S^\mu$ como suma de representaciones irreducibles de $\mathbb{S}_{n+m}$, es equivalente al problema de descomponer $V^\lambda \otimes V^\mu$. En ambos casos los coeficientes de estructura que aparecen son los coeficientes de Littlewood-Richardson.

Esto evidencia una profunda relación entre las teoría de representaciones del grupo simétrico y del grupo lineal general, la llamada *dualidad de Schur-Weyl.* Sea V un espacio vectorial de dimensión m. Recordemos que hemos definido sobre $V^{\otimes m}$ una estructura de $(GL(V), \mathbb{S}_n)$–módulo, donde el grupo $GL(V)$ actúa diagonalmente, y $\mathbb{S}_n$ actúa por la derecha. Estas dos acciones conmutan entre sí, y nos proporcionan la descomposición.

$$V^{\otimes m} = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq m}} S^\lambda \otimes V^\lambda$$

Esta descomposición nos proporciona una manera de estudiar las representaciones del grupo simétrico a través de aquellas del grupo lineal general, y viceversa. Por ejemplo, supongamos que queremos interpretar el producto de Kronecker, entre representaciones del grupo simétrico, en el lenguaje de la teoría de representaciones del grupo lineal general. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y W un espacio vectorial de dimensión m. Para hacer nuestra escritura más transparente, denotamos por V_m^λ a la representación irreducible de GL_m indexada por λ.

Tenemos entonces que $\dim(V \otimes W) = mn$ y

$$(V \otimes W)^{\otimes k} = \sum_{\lambda \vdash k, \ell(\lambda) \leq nm} S^\lambda \otimes V^\lambda$$

donde V_{nm}^λ es la representación irreducible de $V \otimes W$ indexada por λ. Esta representación no es irreducible. Supongamos que se descompone de la forma:

$$V_{n,m}^\lambda = \sum_{\substack{\mu \vdash m, \ell(\mu) \leq n \\ \nu \vdash m, \ell(\nu) \leq m}} (V_n^\mu \otimes V_m^\nu)^{g_{\mu,\nu}^\lambda}.$$

Aplicando otra vez la dualidad de Schur-Weyl, a $(V \otimes W)^{\otimes k}$, pero interpretando esta expresión como $V^{\otimes k} \otimes W^{\otimes k}$, obtenemos

$$V_{n,m}^\lambda = \big(\sum_{\mu \vdash k,\, \ell(\mu) \leq n} V_n^\mu \otimes S^\mu \big) \otimes \big(\sum_{\nu \vdash k, \ell(\nu) \leq m} V_m^\nu \otimes S^\nu \big)$$

Todas estas ecuaciones son ciertas, módulo isomorfismo, así que podemos utilizar la propiedad conmutativa, junto con la descomposición del producto tensorial de representaciones irreducibles del grupo simétrico para concluir que los coeficientes $g_{\mu,\nu}^\lambda$ son precisamente los coeficientes de Kronecker.

Definición 7.2 (Los coeficientes de Kronecker y el grupo simétrico)**.** Los coeficientes de Kronecker son las constantes de estructura que aparecen al descomponer el producto tensorial de representaciones irreducibles del grupo simétrico.

$$S^{\mu} \otimes S^{\nu} = \sum_{\lambda \vdash k} (S^{\lambda})^{\otimes \gamma^{\lambda}_{\mu,\nu}}$$

Nótese que esta ecuación es cierta para cada valor de nm. Por lo tanto podemos omitir la condición $\ell(\lambda) \leq nm$.

Finalmente, podemos utilizar la dualidad de Schur-Weyl para interpretar los coeficientes de Kronecker en el lenguage de la teoría de representaciones del grupo simétrico. Los coeficientes $\gamma^{\lambda}_{\mu,\nu}$ describen la descomposición en irreducibles de la representacion V^{λ} de $GL(V \otimes W)$ como suma de representaciones irreducibles de $GL(V) \times GL(W)$. Finalmente, utilizando la fórmula de reciprocidad de Frobenius podemos describir estos coeficientes en función de la operación de inducción.

Agradecimientos

Agradecemos a Emmanuel Briand por su apoyo y por varias discusiones matemáticas de gran utilidad.

Referencias

[1] K Audenaert, A digest on the representation theory of the symmetric group, Imperial College, versión del 15 de marzo, 2006. `http://personal.rhul.ac.uk/usah/080/qitnotes_files/irrepsv06.pdf`

[2] François Bergeron, Combinatoire algebrique, LaCIM, Universite de Quebec à Montreal. versión de 8 avril, 2001. `http://bergeron.math.uqam.ca`

[3] Fulton Young tableaux. With applications to representation theory and geometry. London Mathematical Society Student Texts, 35. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[4] Alain Lascoux *Symmetric functions and combinatorial operators on polynomials.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 99. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003

[5] Ian G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials. Second edition. With contributions by A. Zelevinsky.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[6] Laurent Manivel, *Fonctions symetriques, polynômes de Schubert et Lieux de degenerescence.* Cours Specialises, 3. Societe Mathematique de France, Paris, 1998.

[7] Bruce E. Sagan, *The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions. Second edition.* Graduate Texts in Mathematics, 203. Springer-Verlag, New York, 2001.

[8] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 1.* With a foreword by Gian-Carlo Rota. Corrected reprint of the 1986 original. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 49. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[9] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 2. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 62. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[10] Andrei V. Zelevinsky, *Representations of finite classical groups. A Hopf algebra approach.* Lecture Notes in Mathematics, 869. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.