



## *Reflexión*

# Geometría, robots y sociedad

**Ardila–Mantilla, Federico**

San Francisco State University.

Universidad de Los Andes.

[federico@sfsu.edu](mailto:federico@sfsu.edu)

Recibido 30 de Enero de 2023; Revisado 30 de Marzo de 2023; Aceptado 28 de Mayo de 2023; Publicado 14 de Agosto de 2023.

Cómo hacer referencia a este artículo: Ardila–Mantilla, F. (2023). Geometría, robots y sociedad. *International Journal of Engineering, Social Justice and Peace*, v. 10, n. 1, 68-79. <https://doi.org/10.24908/ijesjp.v10i1.16248>

---

Muchos llegamos a la ciencia desde la curiosidad, en búsqueda del entendimiento y de la belleza. Con el tiempo descubrimos que la ciencia es una herramienta tremadamente poderosa. El posible éxito y aplicabilidad de nuestro proyecto científico nos enfrentan a preguntas éticas que no podemos ignorar. En una sociedad profundamente desigual, ¿quién tiene acceso a las tecnologías que puedan resultar? ¿Quién se beneficia y quién se perjudica? ¿Cuál es nuestra responsabilidad como científicos e ingenierxs? ¿Qué papel jugamos en la construcción de una sociedad más justa y equitativa? Esta es la reflexión de un investigador cuyo trabajo en matemática “pura” encontró aplicaciones inesperadas.

### **Palabras clave:**

Ética, Geometría, Hipercubos, Planificación de movimiento, Robot.

## UN MATEMÁTICO ENCUENTRA UNA APLICACIÓN

Cuando encuentro el tiempo, me gusta ir a charlas sobre temas que desconozco por completo; los aprendizajes más interesantes con frecuencia vienen de lugares inesperados. Fue así como visité el *Mathematical Sciences Research Institute* en Berkeley una tarde de verano en 2007, y vi por primera vez un “complejo cúbico CAT(0)”. Estos objetos abstractos viven en espacios de alta dimensión, están hechos de cubos, y tienen curvatura negativa, como una silla de montar a caballo o el ala de un sombrero vueltao. Nacieron en la teoría geométrica de grupos, una rama de la matemática pura que yo ni siquiera había oído mencionar. Sin embargo, ¡sentí que yo conocía los dibujos que estaba viendo en esa charla! Se parecían mucho a los “retículos distributivos” que yo había estudiado en mi doctorado en combinatoria. Pasé varias tardes emocionantes tratando de entender la relación entre estos dos objetos – que pertenecían a dos mundos matemáticos muy diferentes – hasta que por fin la comprendí. Así descubrí mi primer teorema sobre complejos cúbicos CAT(0).

Me pareció un teorema bonito, sorprendente. Antes de publicarlo, pensé que sería interesante buscarle una aplicación. Para un matemático, una “aplicación” suele ser una manera de usar un teorema abstracto en un área para demostrar un teorema abstracto en otro campo. Entonces busqué: ¿A quién más le interesarían estos espacios? Encontré algo sorprendente: los complejos cúbicos CAT(0) también aparecían en modelos matemáticos de problemas filogenéticos (Billera, Holmes, y Vogtmann, 2001) y robóticos.

Contacté a dos colegas que trabajaban en filogenética, buscando estrategias matemáticas para descubrir cuál fue el árbol de la evolución que llevó a las especies que existen hoy en día. Juntos descubrimos cómo combinar mi teorema con sus estrategias para navegar estos espacios CAT(0) eficientemente. Pensamos que esto podría tener aplicaciones interesantes en la genética, y publicamos ese trabajo (Ardila, Owen y Sullivant, 2012).

Con el tiempo, me seguí preguntando: ¿Y los robots?

¿Por qué estos espacios matemáticos, a los que les había cogido bastante cariño, aparecen también en la robótica? Con un grupo de estudiantes en Estados Unidos y Colombia dedicamos varios años a entender esta pregunta. Aprendimos que el “mapa universal” de todas las posiciones posibles de un robot es con frecuencia un complejo cúbico CAT(0). Así descubrimos (Ardila, Baker y Yatchak, 2014; Ardila et al., 2017) que nuestra habilidad de navegar estos espacios abstractos tenía una consecuencia concreta: ¡Sabíamos cómo mover algunos robots de una posición a otra, de la manera más rápida y eficiente posible!

## LAS VIDAS NEGRAS IMPORTAN

El 4 de julio de 2016 completamos la implementación de nuestro algoritmo para mover un brazo robótico discreto en un túnel rectangular. El programa le pregunta al usuario el tamaño del robot, una posición inicial y una posición final. Unos segundos después, proyecta un video de la

manera más eficiente de moverlo. Nos pareció hermoso como se movía el brazo en la pantalla, con la agilidad y la economía de movimiento de una serpiente. No cabíamos de la emoción.

El 7 de julio de 2016, aún emocionado por el trabajo del lunes anterior, estaba leyendo las noticias mientras desayunaba. Me enteré de que la policía de Estados Unidos acababa de usar un robot para matar a un ciudadano, por primera vez en la historia. El día comenzó con varias protestas pacíficas del movimiento *Black Lives Matter* en todo Estados Unidos, condenando la violencia desproporcionada e impune del Estado y las fuerzas policiales hacia las comunidades afrodescendientes. Estas protestas en particular rechazaban el asesinato de *Alton Sterling* y *Philando Castile* por policías en Minnesota y Louisiana.

En la protesta en Dallas, Texas, al llegar la noche, un francotirador mató a cinco policías en hechos confusos. La policía de Dallas dijo que identificó a un hombre negro como sospechoso – el hermano de uno de los organizadores de la protesta – publicando su foto en internet y pidiendo ayuda para encontrarlo. Temiendo por su vida, el hombre se entregó a la policía, y rápidamente fue hallado inocente. Unas horas más tarde, la policía identificó al ex-militar Micah Johnson como sospechoso. Lo persiguieron y arrinconaron, y al no lograr negociar con él, usaron un robot para matarlo, sin debido proceso.

Las acciones del francotirador fueron condenadas inmediatamente por el movimiento *Black Lives Matter*; la policía concluyó que el actuó por su cuenta. El hombre inocente, mal identificado por la policía como sospechoso, siguió recibiendo amenazas de muerte por varios meses.

Mi opinión es clara: la policía no debe tener el poder de actuar así. Hay gente que no está de acuerdo conmigo. En algo coincidimos: es muy preocupante es que la enorme mayoría de la gente con la que he hablado ni siquiera sabe que este incidente sucedió, especialmente ahora que varios departamentos policiales en Estados Unidos están considerando el uso de robots capaces de matar.

Nuestro modelo matemático de un robot es bastante simplificado, pero las técnicas que utiliza tienen el potencial de hacer que un robot sea más barato y eficiente. Con frecuencia oímos que la matemática y la ingeniería son herramientas neutrales, pero nuestra investigación no es independiente de sus posibles aplicaciones. Llegamos a la matemática y a la ciencia en búsqueda el entendimiento y la belleza. Cuando descubrimos el poder que llevan, ¿cómo procedemos?

**Axioma.** La matemática es una herramienta poderosa y flexible que puede ser usada de distintas maneras por distintas comunidades para servir a sus necesidades (Ardila-Mantilla, 2016).

¿Quiénes tenemos ese poder? ¿Cómo lo usamos?

¿Con quién lo compartimos? ¿Quién lo financia? ¿A qué comunidades beneficia? ¿A qué comunidades perjudica?

El objetivo de este artículo es invitar a sus lectores, y a mí mismo, y a seguir buscando respuestas que tengan sentido para nosotros.

## LAS VIDAS NEGRAS IMPORTAN

Permítanme compartir la inocente idea matemática que dio pie a esta historia. Consideremos el ejemplo simplificado de un brazo robótico  $Rm,n$  de longitud  $n$  que se mueve en un túnel rectangular de altura  $m$ . El robot tiene  $n$  articulaciones de longitud 1, cada una de las cuales puede apuntar hacia arriba, hacia abajo, o hacia la derecha. El robot puede hacer los siguientes movimientos:



Su base está fija a la esquina inferior izquierda del túnel, como lo muestra la Figura 1 para R2,6. Nuestro objetivo es que el robot navegue el túnel eficientemente. La Figura 1 enseña dos posiciones del robot; supongamos que queremos llegar de la primera a la segunda.

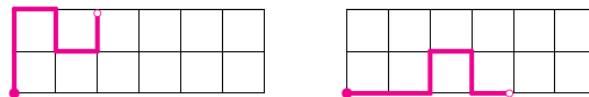


Figura 1: Dos posiciones del robot R2,6.

A prueba y error, no tendremos mucha dificultad en lograrlo. Sin embargo, no es nada claro cómo encontrar la manera más eficiente de hacerlo. Para contestar esta pregunta –y muchas similares– es de gran utilidad construir el mapa de posibilidades, un espacio abstracto que contiene todas las posiciones posibles del robot. La idea es similar a la Biblioteca de Babel que imaginó Jorge Luis Borges, que contiene en sus innumerables anaqueles todos los posibles libros de 410 páginas, 40 renglones por página, y 80 símbolos por renglón.

Ahora, no basta simplemente considerar todas las posiciones posibles del robot. Es cierto que la Biblioteca de Babel contiene todos los libros que han sido escrito, todos los que se escribirán, y muchos más. El problema es que en ese desorden, nunca nadie los ha encontrado. Es fundamental organizar las posibilidades, y lo hacemos como lo muestra el mapa de la Figura 2. Cada esquina del mapa representa una posición del robot, y cada arista representa un movimiento del robot.

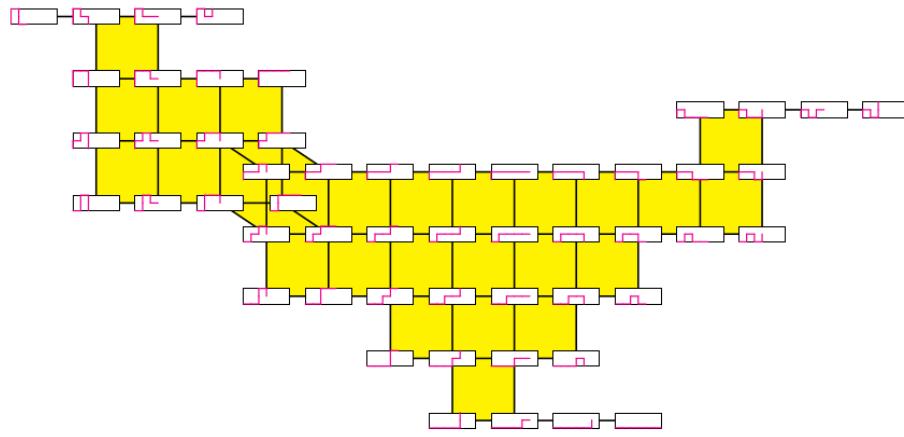
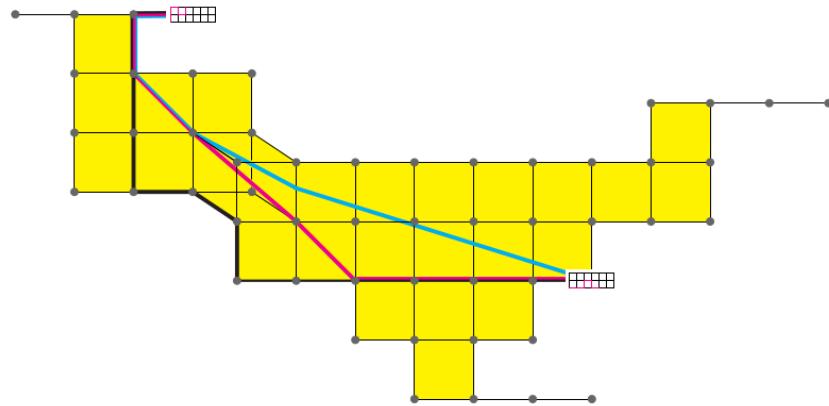


Figura 2: El mapa de posibilidades del brazo robótico R2,6.

Con el mapa a la mano, es claro cómo mover el robot eficientemente de una posición a otra: sólo tenemos que ubicar esas posiciones en el mapa, y seguir el camino más corto, como si fuera el mapa de una ciudad.



Para implementar esta solución, es necesario superar un obstáculo matemático importante: estos mapas de posibilidades son gigantescos y viven en espacios de altísimas dimensiones. Para un brazo de 400 articulaciones en un túnel de ancho 2, el número de posiciones es mayor que el número de átomos del universo, y el mapa tiene más de 100 dimensiones. Estos espacios son tan grandes que, a fuerza bruta, ningún computador es capaz de contenerlos y navegarlos.

Pero estos no son espacios cualquiera: en (Ardila, Baker y Yatchak, 2014; Ardila et al, 2017) logramos demostrar que pertenecen a la familia de complejos cúbicos CAT(0). Usando herramientas de la teoría geométrica de grupos, logramos construir un “control remoto” que reduce enormemente el tamaño y complejidad de nuestra construcción, y nos permite mover nuestros robots de la manera más eficiente posible.

En definitiva, no existe distinción alguna entre la matemática “pura” y la “aplicada”.

## CAFECITO

Estoy escribiendo este artículo en una visita académica a una ciudad que no conozco bien. A mí me gusta mucho el café, y llevo varias mañanas estudiando el mapa con cuidado; aún no he logrado encontrar un café bien sabroso en el camino entre mi apartamento y mi oficina.

Una mañana, mi compañera May-Li me detiene cuando estoy de salida, riéndose, y me dice:

– Fede, tú sabes que no siempre tienes que seguir el camino más eficiente de la casa a la oficina, cierto?

Tal vez, en vez de siempre buscar el camino más eficiente, deberíamos buscar el más hermoso, o el más ecológico, o el más sorprendente, o el más sabroso.

## ¿CÓMO PROCEDEMOS?

Cuando empecé a sentir que este trabajo, al cual llegué desde la matemática “pura”, podría tener aplicaciones en la vida real con las que no estaría de acuerdo, me empecé a sentir ansioso y a ser muy cuidadoso al decidir con quién discutirlo. Es una sensación extraña, descubrir algo que te gusta mucho, y desear que no mucha gente llegue a conocerlo.

En 2019 la *Notices of the American Mathematical Society*, una de las revistas matemáticas de mayor circulación en el mundo, me invitó a escribir un artículo sobre mapas y robots. Decidí que, en vez de tratar de esconder la matemática que sé, sería más útil usarla para impulsar una conversación sobre cómo usamos la matemática. La verdad es que no me sentía muy cómodo escribiendo por fuera del mundo imaginario que compartimos los matemáticos, donde creemos tener muy claro qué está bien y qué está mal. Aún así, sabía que era una oportunidad importante para aprender, escuchar, discutir, incluso escribir desde la incomodidad que sentía<sup>1</sup>.

¿Cómo debería contar esta historia? Les pedí consejos, sabiduría, a muchos amigos, colegas, y estudiantes.

A Mario Sánchez, que piensa profunda y críticamente sobre la cultura de la matemática y la filosofía en nuestra sociedad, le preocupan las modas matemáticas: ¿Qué tal que se ponga de moda que los matemáticos empiecen a optimizar robots, sin pensar qué se está optimizando, o a quién beneficia esa optimización?” Me dice, con su silenciosa intensidad: “Si te preocupa que tu artículo tenga este efecto, más vale que enfatices la cuestión humana fuertemente.”

---

<sup>1</sup> El Referí 2 dijo que la matemática era interesante, pero que le interesaba mucho menos oírme “rumiar sobre asuntos éticos.”

Laura Escobar acaba de regresar de un retiro de yoga, donde una estudiosa de la literatura india les contó la historia de Arjuna, un joven guerrero que está a punto de entrar en batalla contra miembros de su propia familia. Conflictuado por la gran violencia que está a punto de desatarse, le pide consejo a Krishna. Simplificando su respuesta, Krishna le dice: “Uno no debe abandonar los deberes asignados a su naturaleza, aun si uno encuentra defectos en ellos. Tú eres un guerrero. Tu deber es sostener el Dharma, tomar acción, y pelear.” Con su risa considerada, Laura recuerda las reacciones alarmadas de sus pacifistas compañeros de yoga. Ella y yo crecimos en el medio de una guerra civil de más de 60 años en Colombia, que ha matado a más de 215.000 civiles y 45.000 combatientes, y ha desplazado a más del 15% de la población del país (C. N. de Memoria Histórica, 2018; U.N.H.C.R, 2018); a nosotros también nos cuesta entender el consejo de Krishna. Vamos a la librería y compramos dos copias del Bhagavad Gita<sup>2</sup>.

May-Li Khoe, con su manera sabia y directa de decir las cosas, me pregunta: “Si de verdad crees que este modelo de hacer mapas de posibilidades puede ser aplicable en muchas áreas como la robótica, y no confías en las organizaciones que construyen los robots más poderosos, ¿por qué no buscas otras aplicaciones?” Tiene razón. Sigo buscando.

A muchos de mis amigos que no trabajan en la ciencia les sorprende la falta de recursos estructurales e institucionales. Me preguntan: Si un matemático o científico quiere entender o tener algún control sobre el impacto social de su conocimiento y sus descubrimientos, ¿a qué organizaciones le puede pedir ayuda? Se lo he preguntado a mucha gente, y no he encontrado una respuesta definitiva, pero sigo buscando. Organizaciones interdisciplinarias como la *Union of Concerned Scientists*, *Science for the People*, *Data for Black Lives*, y secciones de la *American Association for the Advancement of Science* buscan usar la ciencia para mejorar las vidas de la gente y avanzar la justicia social. Académicos en los departamentos de Ciencia, Tecnología y Sociedad, Política Pública, Historia, Filosofía y Etnoeducación han estudiado estas preguntas por décadas, incluso siglos. Esto ha sucedido demasiado lejos de las facultades de Ciencias, y hay que decir que mi generación de científicos en su gran mayoría mira por encima del hombro a estas disciplinas, considerándolas faltas de rigor, interés, o importancia. Gobiernos, empresas y organizaciones profesionales convocan Comités de Ética, usualmente lejos de sus centros de operación, y les dan muy poco poder de tomar decisiones.

¿Cómo hacemos que estas consideraciones sean una parte integral de la práctica y aplicación de la ciencia? Me alienta ver que la nueva generación de científicos entiende el papel urgente que juega en nuestras sociedades mucho mejor que mi generación y las anteriores.

---

2 Unos meses después nos enteramos de que Robert Oppenheimer también citó al Bhagavad Gita cuando él y su equipo detonaron la primera bomba nuclear.

## AUTOMATIZACIÓN

Voy en mi carro en San Francisco, California, detrás de un conductor malísimo. Maneja demasiado despacio, duda en cada esquina, se cuelga en cada policía acostado. Cuando por fin pierdo la paciencia y decido adelantarlos, gira el timón con violencia y me tira el carro encima; apenas logro reaccionar para que no me estrelle. Volteo a mirar mal al conductor, cuando me doy cuenta: no hay conductor. ¿Qué sucede cuando te lesiona un vehículo robótico auto-conducido? Cuando vives tan cerca de Silicon Valley, esta no es una pregunta filosófica.

## CONVERSACIONES

Con el objetivo de promover estas herramientas a un público más amplio, mi colaborador César Ceballos y yo organizamos un taller con el club de robótica del Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín en 2018. El taller hacía parte de los Clubes de Ciencia de Colombia, que invitan a investigadores a diseñar actividades científicas para grupos de estudiantes de instituciones de educación pública en el país. Les propusimos algunos modelos discretos de brazos robóticos, y los estudiantes rápidamente construyeron sus mapas de posibilidades. También, con mucha generosidad, pusieron en evidencia que César y yo no sabíamos nada sobre cómo se construye un robot, y diseñaron varios mecanismos posibles para nuestro modelo. Unas semanas después del taller, Arlys Asprilla implementó uno de estos diseños en CAD y construyó un prototipo inicial.

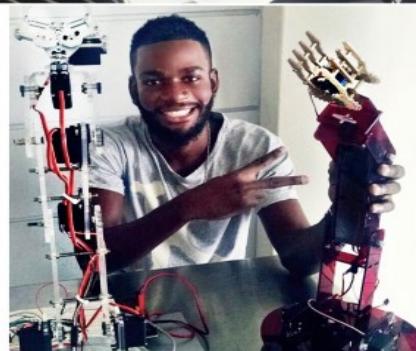


Figura 3: a. Mapas de posibilidades en los Clubes de Ciencia de Colombia.  
b. Arlys Asprilla y uno de sus brazos robóticos.

En 2020, Arlys, su compañero de clase Wolsey Rubio, mi pareja May-Li Khoe, nuestro amigo Akil King, y yo, organizamos otro taller en el Chocó, el departamento de donde provienen Arlys y Wolsey. Esta región de la costa pacífica colombiana es una de las más ricas y biodiversas del planeta, y a la vez una de las más descuidadas históricamente por el gobierno colombiano. Nos asociamos con la Escuela de Robótica del Chocó liderada por Jimmy García, que ofrece la inspiración y las herramientas para que jóvenes de la región desarrollen sus habilidades científicas y tecnológicas, y las usen en beneficio de sus comunidades. Como suele suceder, aprendimos más de lo que enseñamos.

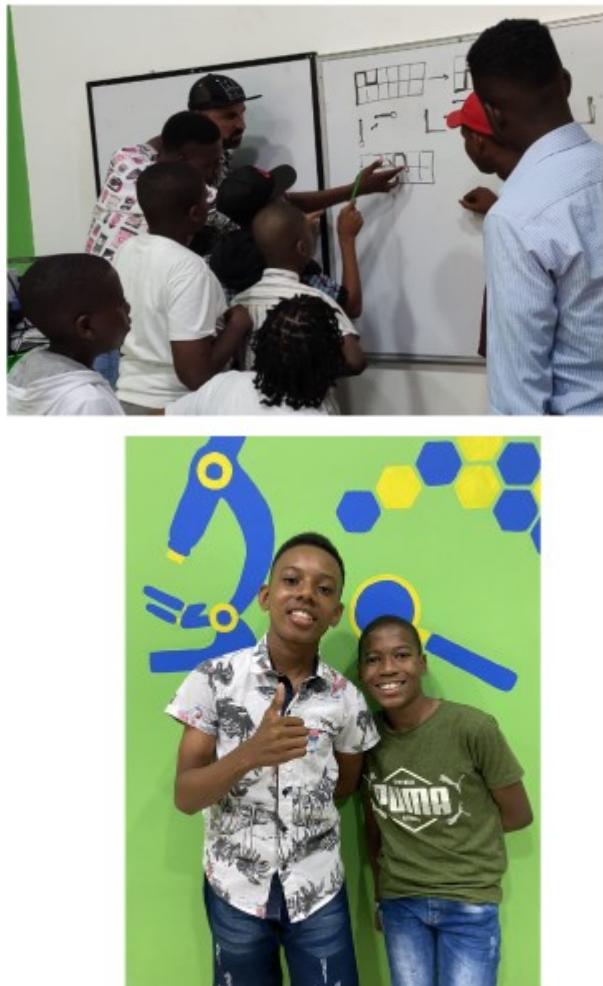


Figura 4: a. Mapas de posibilidades en la Escuela de Robótica del Chocó.  
b. Deison Rivas y Juan David Cuenta.

Al final del taller, les preguntamos a los estudiantes: ¿Qué robot quieren diseñar? Deison Rivas quiere construir un robot bombero: apagará con rapidez y sin peligro los incendios en las casas – tradicionalmente construidas de madera – que han destrozado barrios enteros de Quibdó. Juan

David Cuenta quiere diseñar un pequeño y ágil robot de rescate: le ayudará a la gente atrapada bajo los frecuentes derrumbes, causados por la minería y las fuertes lluvias en la región.

Inmediatamente, este ejercicio teórico de cómo optimizar un robot adquirió un significado muy diferente para mí, gracias a la sabiduría de estos jóvenes.

## INICIATIVAS

La *Notices of the AMS* en 2020 publicó mi artículo en 2020 (Ardila-Mantilla, 2020). Por la misma época, en parte debido a los asesinatos de *George Floyd*, *Breonna Taylor*, y muchos otros afrodescendientes por parte de fuerzas policiales, el movimiento *Black Lives Matter* volvió a tomar mucho impulso, dando a pie a más de 450 protestas en Estados Unidos, Colombia, y muchos otros países. En la pequeña esquina del conocimiento donde trabajo, las cosas han cambiado un poco desde entonces.

El Just Mathematics Collective fue fundado en 2020 con el objetivo de redirigir a la comunidad matemática global hacia la justicia, el anti-racismo, el antimilitarismo, y la solidaridad con el Sur Global. Grupos de matemáticos nos organizamos para visibilizar el papel que jugamos en las estrategias modernas de las fuerzas policiales y militares, y para buscar convencer a nuestros colegas de no trabajar con fuerzas policiales (Autores varios, 2020). Se desarrollaron cursos, talleres, artículos, y conversatorios sobre ética y matemáticas. Estas y otras iniciativas visibilizaron grandes diferencias de opinión, y trajeron conversaciones difíciles pero necesarias en la construcción de una matemática que beneficie a todas las comunidades.

Personalmente, me dio tranquilidad entender mi artículo como una pequeña contribución a todo un movimiento colectivo que está evaluando críticamente el quehacer matemático y su impacto en la sociedad.

## NUESTRO TRABAJO COMO EDUCADORES

Mientras le pongo los toques finales, recuerdo un libro que heredé de mi mamá, cuando falleció en 2010. Al hojearlo me encuentro con esta frase, marcada con su resaltador azul celeste:

El logro más triste de nuestro sistema educativo consiste en producir [...] a la persona más desastrosa de nuestra sociedad: el científico creador que es al mismo tiempo esclavo<sup>3</sup> del aparato militar o industrial; alguien que hace aportes pero a quien no le interesa para nada la manera como van a ser utilizados.

– Estanislao Zuleta (Zuleta, 1995).

---

<sup>3</sup> En una observación muy precisa, el uso de la palabra ‘esclavo’ me parece impreciso y desafortunado.

## ¿QUÉ SIGNIFICA HACER MATEMÁTICA ÉTICAMENTE?

En 2013, mi estudiante Brian Cruz me preguntó si los matemáticos tenemos un código ético, similar al juramento hipocrático de los médicos. Era la primera vez que oía algo así, después de dos décadas de trabajo como matemático.

Gracias a Brian, investigué con la ayuda de mis estudiantes, organicé un repositorio de artículos y videos sobre el tema<sup>4</sup>, y ahora le dedico un día de clase y una tarea a este tema en cada clase que dicto.

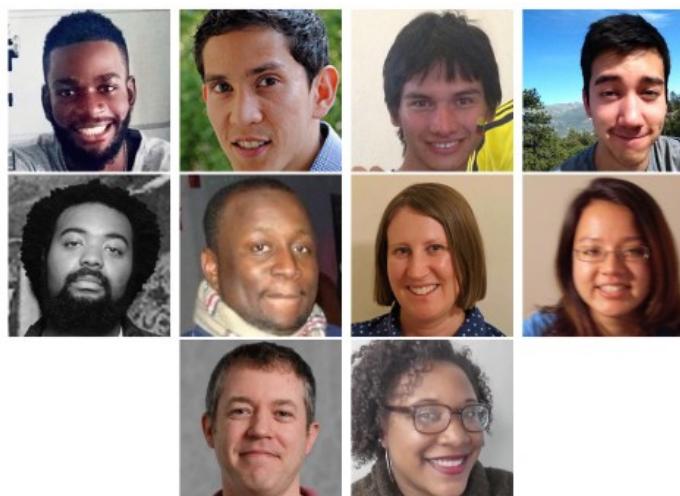
*Tarea. ¿Qué significa “hacer matemática éticamente” para ti? Esta pregunta es una invitación para reconocer el poder que tienes como matemático, y el privilegio y responsabilidad que ese poder conlleva. Cuando entras a una carrera científica, no te dejas a tí mismo en la puerta. Puedes escoger como usar ese poder. Mi esperanza es que siempre tengas en cuenta esta pregunta en tu trabajo.*

Formular la pregunta a mis estudiantes – y a mis lectores – es sin duda más importante que ofrecerles mi respuesta

## AGRADECIMIENTOS

Dedico este artículo a mi mamá, Amparo Mantilla. Una de sus incontables enseñanzas es la importancia de pensar críticamente en el impacto de la ciencia en la sociedad.

Partes de este artículo aparecieron en inglés en Ardila-Mantilla (2020). Estoy muy agradecido con toda la gente que me animó a compartir esta historia y me ayudó a encontrar la manera de contarla. Agradezco en especial a todos los estudiantes y colegas con quienes he trabajado en este proyecto de investigación: Arlys Asprilla, César Ceballos, Hanner Bastidas, John Guo, Matthew Bland, Maxime Pouokam, Megan Owen, Rika Yatchak, Seth Sullivant, y Tia Baker.



4 Estos están disponibles en [www.fardila.com/ethicsinmath.html](http://www.fardila.com/ethicsinmath.html)

## REFERENCIAS

- Ardila, F., Baker, T., & Yatchak, R. (2014). Moving robots efficiently using the combinatorics of CAT (0) cubical complexes. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 28(2), 986-1007.
- Ardila, F., Bastidas, H., Ceballos, C., & Guo, J. (2017). The configuration space of a robotic arm in a tunnel. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 31(4), 2675-2702.
- Ardila, F., Owen, M., & Sullivant, S. (2012). Geodesics in CAT (0) cubical complexes. *Advances in Applied Mathematics*, 48(1), 142-163.
- Ardila-Mantilla, F. (2016). Todos cuentan: Cultivating diversity in combinatorics. *Notices of the American Mathematical Society*, 63(10), 1164-1170.
- Ardila-Mantilla, F. (2020). CAT(0) geometry, robots, and society. *Notices of the American Mathematical Society*, 67(07), 977-987.
- Autores varios (2020). Boycott collaboration with police, *Notices of the American Mathematical Society*, 67(09), 1293–1294.
- Billera, L. J., Holmes, S. P., & Vogtmann, K. (2001). Geometry of the space of phylogenetic trees. *Advances in Applied Mathematics*, 27(4), 733-767.
- Centro Nacional de Memoria Histórica de Colombia. (2018). “Observatorio de Memoria Y Conflicto.” <http://centrodememoriahistorica.gov.co/observatorio/>. Agosto de 2018.
- United Nations High Commission for Refugees. (2019). “Global trends, forced displacement in 2018.” <https://www.unhcr.org/5d08d7ee7.pdf>. Junio de 2019.
- Zuleta, E. (1995). La educación, un campo de combate. *Educación Y Democracia*. Fundación Estanislao Zuleta, 1995..